Jesienne dowody

Zadanie 1.

Wykaż, że istnieje taka liczba naturalna $n > 0$, że co najmniej jedna z liczb $2^n - 1$ lub $2^n + 1$ jest podzielna przez 3. Podaj dwa sposoby rozwiązania.

Rozwiązanie

Sposób I (dowód niekonstruktywny)

Skoro liczba 3 jest liczbą pierwszą, to wystarczy uzasadnić, że jest ona dzielnikiem iloczynu:

$$(2^n - 1)(2^n + 1) = 2^{2n} - 1^2 = 4^n - 1.$$

Podzielność $3 \mid (4^n - 1)$ można uzasadnić indukcyjnie albo przy pomocy kongruencji (na temat kongruencji pisaliśmy już w 3. wydaniu Świata Matematyki i korzystaliśmy z niej wielokrotnie np. w artykule WŁASNOŚCI DZIELENIA z 44. wydania czasopisma).

Sposób II (dowód konstruktywny)

Rozważmy dwa przypadki:

1° $n = 2k + 1$ dla $k = 0, 1, 2,\ldots$ oraz

2° $n = 2k$ dla $k = 1, 2, 3,\ldots$

Ad 1° mamy:

$$2^n + 1 \equiv 2^{2k+1} + 1 \equiv 2 \cdot 4^k + 1 \equiv 2(3+1)^k + 1 \equiv 2 \cdot 1^k + 1 \equiv 3 \equiv 0 \pmod 3.$$

Ad 2° mamy:

$$2^n - 1 \equiv 2^{2k} - 1 \equiv 4^k - 1 \equiv (3+1)^k - 1 \equiv 1^k - 1 \equiv 0 \pmod 3.$$