

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI – rozwiązania, poziom rozszerzony(4)(zadania publikowane w *Świecie Matematyki* nr 69, dostępnym w sklepie na naszej stronie)**Zadanie 1.**

Założenie: $m \neq 0$ i $\Delta = (-2m)^2 - 4 \cdot m \cdot 1 = 4m^2 - 4m \geq 0$. Rozwiązaniem ostatniej nierówności jest zbiór $m \in (-\infty; 0) \cup \langle 1; \infty$. Zatem $m \in (-\infty; 0) \cup \langle 1; \infty$. Ze wzorów Viète'a wynika, że:

$$x_1 + x_2 = -\frac{-2m}{m} = 2 \text{ oraz } x_1 x_2 = \frac{1}{m}.$$

Podany warunek możemy zapisać w postaci:

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 2,$$

czyli:

$$2^2 - 2 \cdot \frac{1}{m} = 2,$$

stąd $m = 1$. Założenia zadania zostały spełnione.

Odpowiedź: $m = 1$.

Zadanie 2.

Mamy do rozwiązania równanie $x^3 - mx^2 + mx - 1 = 0$. Stąd kolejno otrzymujemy:

$$\begin{aligned} (x^3 - 1) - mx(x - 1) &= 0, \\ (x - 1)(x^2 + x + 1) - mx(x - 1) &= 0, \\ (x - 1)(x^2 + (1 - m)x + 1) &= 0, \\ x = 1 \text{ lub } x^2 + (1 - m)x + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Ostatnie równanie musi mieć dwa różne rozwiązania, oba różne od 1. Zatem:

$$\Delta = (1 - m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 > 0 \text{ oraz } 1^2 + (1 - m) \cdot 1 + 1 \neq 0.$$

Wobec tego $m^2 - 2m - 3 > 0$ oraz $m \neq 3$. Rozwiązaniem ostatniej nierówności jest zbiór $m \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$.

Odpowiedź: $m \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$.

Zadanie 3.

Podstawmy $t = 12^{|x|}$. Wtedy mamy do rozwiązania nierówność:

$$t^2 - 13t + 12 \geq 0,$$

stąd:

$$t \leq 1 \text{ lub } t \geq 12,$$

czyli:

$$12^{|x|} \leq 1 \text{ lub } 12^{|x|} \geq 12.$$

Zatem:

$$12^{|x|} \leq 12^0 \text{ lub } 12^{|x|} \geq 12^1,$$

a więc:

$$|x| \leq 0 \text{ lub } |x| \geq 1.$$

Wobec tego $x = 0$ lub $x \geq 1$ lub $x \leq -1$.

Odpowiedź: $m \in (-\infty; -1) \cup \{0\} \cup \langle 1; \infty$.

Zadanie 4.

Założenie: $x > 0$. Oznaczmy $t = x^{\log x}$. Ponieważ $x^{\log \frac{1}{x}} = x^{-\log x} = \frac{1}{x^{\log x}}$, zatem mamy równanie:

$$t + \frac{1}{t} = 10 \frac{1}{10},$$

czyli:

$$10t^2 - 101t + 10 = 0.$$

Stąd:

$$t = 10 \text{ lub } t = \frac{1}{10},$$

czyli:

$$x^{\log x} = 10 \text{ lub } x^{\log x} = \frac{1}{10}.$$

Stąd:

$$\log x^{\log x} = \log 10 \text{ lub } \log x^{\log x} = \log \frac{1}{10},$$

$$\log x \cdot \log x = 1 \text{ lub } \log x \cdot \log x = -1.$$

Zatem:

$$(\log x)^2 = 1 \text{ lub } (\log x)^2 = -1.$$

Pierwsze równanie daje alternatywę:

$$\log x = 1 \text{ lub } \log x = -1.$$

Drugie równanie nie ma rozwiązania. Wobec tego mamy rozwiązania:

$$x = 10^1 = 10 \text{ lub } x = 10^{-1} = \frac{1}{10}.$$

Oba spełniają założenia.

Zadanie 5.

Mamy kolejno równania równoważne:

$$|\sin x| + |\cos x| = 1,$$

$$(|\sin x| + |\cos x|)^2 = 1^2, \quad (\text{dla } a, b \geq 0 \text{ mamy } a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2)$$

$$|\sin x|^2 + 2|\sin x| \cdot |\cos x| + |\cos x|^2 = 1^2,$$

$$\sin^2 x + |2 \sin x \cos x| + \cos^2 x = 1,$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x) + |\sin 2x| = 1,$$

$$1 + |\sin 2x| = 1,$$

$$|\sin 2x| = 0,$$

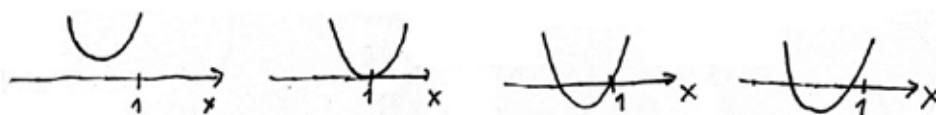
$$\sin 2x = 0,$$

$$2x = k\pi,$$

$$x = k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k - \text{liczba całkowita}).$$

Zadanie 6.

Mamy $f(x) = x^3 + mx^2 + x + m$, skąd $f'(x) = 3x^2 + 2mx + 1$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wykres pochodnej (funkcja kwadratowa) musi być następujący:



gdyż pochodna funkcji f w przedziale $(1, \infty)$ musi być dodatnia. Zatem:

$$\Delta < 0 \text{ lub } (x_w = 1 \text{ i } \Delta = 0) \text{ lub } x_1 < x_2 \leq 1.$$

Wobec tego:

$$2m^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 < 0 \text{ lub } x_w = \frac{-b}{2a} = \frac{-2m}{6} = 1 \text{ lub } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \leq 1 \quad (\text{dla } \Delta \geq 0, a > 0).$$

Wynika stąd, że:

$$m \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \text{ lub } m \in \mathbb{Q} \text{ lub } x_2 = \frac{-2m + \sqrt{4m^2 - 12}}{6} \leq 1.$$

Przekształcamy ostatnią nierówność i otrzymujemy:

$$\sqrt{4m^2 - 12} \leq 6 + 2m.$$

Musi być:

$$6 + 2m \geq 0,$$

czyli:

$$m \geq -3.$$

Dalej mamy:

$$\begin{aligned} (\sqrt{4m^2 - 12})^2 &\leq (6 + 2m)^2, \\ 4m^2 - 12 &\leq 36 + 24m + 4m^2, \\ m &\geq -2. \end{aligned}$$

Ponadto:

$$4m^2 - 12 \geq 0,$$

czyli:

$$m \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup \langle \sqrt{3}; \infty \rangle,$$

a więc:

$$m \in (-2; -\sqrt{3}) \cup \langle \sqrt{3}; \infty \rangle.$$

Odpowiedź: $m \in (-2; -\sqrt{3}) \cup \langle \sqrt{3}; \infty \rangle$

Zadanie 7.

Rozważana nieskończona suma składa się z dwóch szeregów geometrycznych:

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \dots \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \dots \quad (\text{gdzie } x \neq 0).$$

Pierwszy z powyższych szeregów ma wyraz pierwszy x i iloraz $\frac{1}{2}x$.

Drugi z powyższych szeregów ma wyraz pierwszy $\frac{1}{x}$ i iloraz $-\frac{1}{x}$.

Warunkiem zbieżności nieskończonego szeregu geometrycznego o ilorazie q jest nierówność $|q| < 1$. Jeżeli ten warunek jest spełniony, to suma wyrazów tego ciągu wynosi $S = \frac{a_1}{1-q}$, gdzie a_1 to pierwszy wyraz ciągu.

W naszym przypadku mamy:

$$q = \frac{1}{2}x \quad \text{i} \quad a_1 = x \quad \text{oraz} \quad q = -\frac{1}{x} \quad \text{i} \quad a_1 = \frac{1}{x}.$$

Zatem mamy nierówności:

$$\left| \frac{1}{2}x \right| < 1 \quad \text{i} \quad \left| \frac{-1}{x} \right| < 1$$

oraz równanie:

$$(1) \quad \frac{x}{1 - \frac{1}{2}x} + \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{-1}{x}} = 6\frac{2}{5}.$$

Z dwóch ostatnich nierówności wynika, że:

$$x \in (-2; 2) \quad \text{i} \quad x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty),$$

czyli:

$$(2) \quad x \in (-2; -1) \cup (1; 2).$$

Rozwiązujemy równanie (1):

$$\begin{aligned} \frac{2x}{2-x} + \frac{1}{x+1} &= 6\frac{2}{5}, & / \cdot 5(2-x)(x+1) \\ 10x(x+1) + 5(2-x) &= 32(2-x)(x+1), \\ 10x^2 + 5x + 10 &= -32x^2 + 32x + 64, \\ 47x^2 - 27x - 54 &= 0, & / : 3 \\ 14x^2 - 9x - 18 &= 0. \end{aligned}$$

Obliczamy $\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 14 \cdot (-18) = 1089$, skąd $\sqrt{\Delta} = 33$.

Zatem:

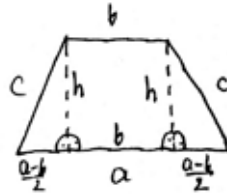
$$x_1 = \frac{9+33}{2 \cdot 14} = \frac{42}{28} = 1\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{9-33}{2 \cdot 14} = \frac{-24}{28} = -\frac{6}{7}.$$

Liczba x_1 spełnia założenie (2), a liczba x_2 nie spełnia go.

Odpowiedź: $x = 1\frac{1}{2}$.

Zadanie 8.

Spójrz na rysunek pod spodem.



Wiadomo, że w czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy, gdy sumy przeciwległych boków tego czworokąta są równe. Zatem:

$$c + c = a + b,$$

skąd:

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy równanie:

$$h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = c^2,$$

czyli:

$$h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Stąd $h^2 = ab$. Wobec tego $r = \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$ (dlaczego?). Oczywiście $c = \frac{a+b}{2}$.

Zadanie 9.

Niech x i h oznaczają odpowiednio krawędź podstawy (kwadratu) oraz wysokość prostopadłościanu. Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu wynosi:

$$x^2 + 4xh + x^2 = 48,$$

czyli:

$$x^2 + 2xh = 24,$$

skąd:

$$h = \frac{24 - x^2}{2x}.$$

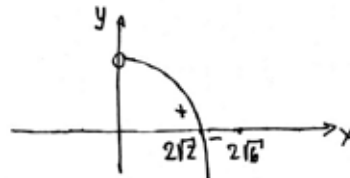
Objętość prostopadłościanu wynosi:

$$V = x^2 h = x^2 \cdot \frac{24 - x^2}{2x} = 12x - \frac{1}{2}x^3.$$

Obliczamy pochodną funkcji V :

$$V'(x) = 12 - \frac{3}{2}x^2 \text{ dla } x \in (0; 2\sqrt{6}), \text{ (dlaczego?).}$$

Rysujemy wykres $V'(x)$.



Mamy:

$$V'(x) > 0 \text{ dla } x \in (0; 2\sqrt{2}),$$

$$V'(x) < 0 \text{ dla } x \in (2\sqrt{2}; 2\sqrt{6}),$$

$$V'(2\sqrt{2}) = 0.$$

Wobec tego w punkcie $x = 2\sqrt{2}$ mamy maksimum funkcji V .

$$\text{Zatem } V_{\max} = V(2\sqrt{2}) = 16\sqrt{2}.$$

Zadanie 10.

Wszystkich zdarzeń elementarnych jest tyle, ile ciągów (i, j, k) , gdzie $i, j, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, czyli.

$$\overline{\Omega} = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216.$$

Wyznaczamy liczbę ciągów geometrycznych:

$(1, 1, 1); (2, 2, 2); (3, 3, 3); (4, 4, 4); (5, 5, 5); (6, 6, 6)$ – są to ciągi geometryczne o ilorazie 1,

$(1, 2, 4); (4, 2, 1)$ – są to ciągi o ilorazach odpowiednio $\frac{1}{2}$ oraz 2.

Zatem $\overline{A} = 6 + 1 + 1 = 8$ (A – zdarzenie zawarte w treści zadania).

Mamy:

$$P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}} = \frac{8}{216} = \frac{1}{27}.$$

Zadanie 11.

Równania podanych okręgów zapisujemy w postaci:

$$(x+m)^2 + y^2 = 1 \quad \text{i} \quad (x+2)^2 + y^2 = 1.$$

Środek pierwszego okręgu ma współrzędne $S_1(-m; 0)$ i promień $r_1 = 1$.

Środek drugiego okręgu ma współrzędne $S_2(-2; 0)$ i promień $r_2 = 1$.

(a) Styczna wewnętrzna.

Mamy wtedy warunek $|S_1 S_2| = |r_1 - r_2|$, czyli:

$$\sqrt{(-2 - (-m))^2 + (-1 - (-1))^2} = |1 - 1|,$$

$$\sqrt{(-2 + m)^2} = 0,$$

$$|m - 2| = 0,$$

$$m = 2.$$

Okręgi pokrywają się, ponieważ posiadają taki sam promień.

(b) Styczna zewnętrzna.

Mamy wtedy warunek $|S_1 S_2| = |r_1 + r_2|$, czyli:

$$\sqrt{(-2 + m)^2 + 0^2} = |1 + 1|,$$

$$\sqrt{(m - 2)^2} = 2,$$

$$|m - 2| = 2,$$

$$m - 2 = 2 \quad \text{lub} \quad -(m - 2) = 2,$$

$$m = 4 \quad \text{lub} \quad m = 0.$$

Zadanie 12.

Mamy równość $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ (dlaczego?). Stąd:

$$a_{n+1} = ((n+1)^2 + 4(n+1)) - (n^2 + 4n) = (n^2 + 6n + 5) - (n^2 + 4n) = 2n + 5.$$

Niech $n > 1$. Podstawmy $n - 1$, zamiast n . Wtedy:

$$a_n = 2(n - 1) + 5, \quad \text{czyli} \quad a_n = 2n + 3 \quad \text{dla} \quad n > 1.$$

Wykażemy, że powyższy wzór jest również prawdziwy dla $n = 1$. Istotnie:

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 4 \cdot 1 = 5 = 2 \cdot 1 + 3.$$