Zadania na zbiorach

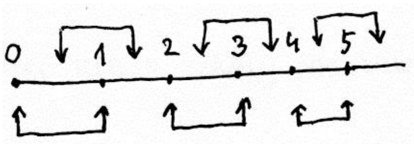
Zadanie 1.

Wykaż, że półprosta jest zbiorem parzystym i nieparzystym.

Rozwiązanie

Utożsamimy półprostą z przedziałem $\langle 0, \infty)$.

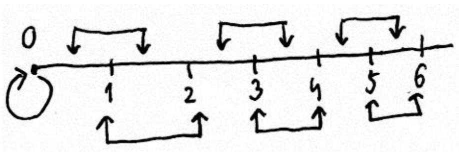
1° Parzystość.



$0 \leftrightarrow 1$, $2 \leftrightarrow 3$, $4 \leftrightarrow 5$,… itd.

$(m, m+1) \leftrightarrow (m+1, m+2)$ w symetrii względem liczby $m+1$ (gdzie $m = 0, 2, 4, \ldots$).

2° Nieparzystość.



$0 \leftrightarrow 0$, $1 \leftrightarrow 2$, $3 \leftrightarrow 4$, $5 \leftrightarrow 6$,… itd.

(m, m + 1) $\leftrightarrow$ (m + 1, m + 2) w symetrii względem liczby $m+1$ (gdzie $m = 0, 2, 4, \ldots$).

Zadanie 2.

Oznaczmy $A \div B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ (jest to tzw. różnica symetryczna zbiorów). Wykaż, że:

(a) $A \div A = \emptyset$,

(b) $A \div B = B \div A$,

(c) $A \div \emptyset = A$,

(d) $A \div \Omega = A'$,

(e) $A \div A' = \Omega$,

(f) $(A \div B) \div C = A \div (B \div C)$.

Rozwiązanie

(a) $A \div A = (A \backslash A) \cup (A \backslash A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$,

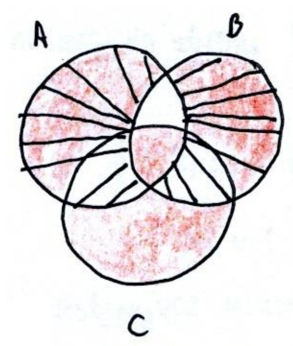
(b) $A \div B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (B \backslash A) \cup (A \backslash B) = B \div A$,

(c) $A \div \emptyset = (A \backslash \emptyset) \cup (\emptyset \backslash A) = A \cup \emptyset = A$,

(d) $A \div \Omega = (A \backslash \Omega) \cup (\Omega \backslash A) = \emptyset \cup A' = A'$,

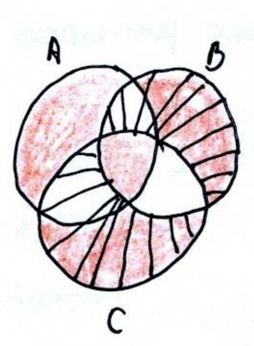
(e) $A \div A' = (A \backslash A') \cup (A' \backslash A) = A \cup A' = \Omega$,

(f) aby uniknąć skomplikowanych przekształceń, przedstawimy dowód na diagramach:



Zakreskowany obszar to $A \div B$.

Czerwony obszar to $(A \div B) \div C$.



Zakreskowany obszar to $B \div C$.

Czerwony obszar to $A \div (B \div C)$.

Zadanie 3.

Wyznacz:

(a) $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-n; 1)$, (b) $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-n; 1)$, (c) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\langle 0; \frac{1}{n} \right\rangle$,

Odpowiedź. (a) $(-\infty, 1)$, (b) $(-1,1)$, (c) $\{0\}$.

Zadanie 4.

Wypisz wszystkie podzbiory zbioru $\{a, b, c, d\}$.

Rozwiązanie

$\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{b, c, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b, c, d\}$.

Zadanie 5.

Wykaż, że przedziały (a, b) i (c, d) są równoliczne.

Rozwiązanie

Należy podać funkcję różnowartościową przekształcającą przedział (a, b) na przedział (c, d). Taką funkcją jest funkcja f o przepisie:

$f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x - a) + c$ dla $x \in (a, b)$.