Zespolona przygoda

Zadanie 1.

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases}(1+i)x+(2-i)y=2-2i\\(1-i)x+(3-i)y=3+3i\end{cases}$$

Wiedząc, że x i y to liczby zespolone.

Rozwiązanie

$$\begin{cases}(1+i)x+(2-i)y=2-2i\\(1-i)x+(3-i)y=3+3i\end{cases}$$

Niech

$$x=a+bi \qquad i \qquad y=p+qi$$

Wówczas

$$\begin{cases}(1+i)(a+bi)+(2-i)(p+qi)=2-2i\\(1-i)(a+bi)+(3-i)(p+qi)=3+3i\end{cases}$$

$$\begin{cases}a+bi+ai-b+2p+2qi-pi+q=2-2i\\a+bi-ai+b+3p+3qi-pi+q=3+3i\end{cases}$$

Po rozdzieleniu części rzeczywistych i urojonych mamy

$$\begin{cases}a-b+2p+q=2\\a+b-p+2q=-2\\a+b+3p+q=3\\-a+b-p+3q=3\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=2+b-2p-q\\a+b-p+2q=-2\\a+b+3p+q=3\\-a+b-p+3q=3\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=2+b-2p-q\\2+b-2p-q+b-p+2q=-2\\2+b-2p-q+b+3p+q=3\\-(2+b-2p-q)+b-p+3q=3\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=2+b-2p-q\\2b-3p+q=-4\\2b+p=1\\-2-b+2p+q+b-p+3q=3\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=2+b-2p-q\\2b-3p+q=-4\\2b+p=1\\p+4q=5\end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 + b - 2p - q \\ 2b - 3p + q = -4 \\ 2b = 1 - p \\ p + 4q = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 + b - 2p - q \\ 1 - p - 3p + q = -4 \\ 2b = 1 - p \\ p + 4q = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 + b - 2p - q \\ -4p + q = -5 \\ 2b = 1 - p \\ p + 4q = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 + b - 2p - q \\ q = -5 + 4p \\ 2b = 1 - p \\ p + 4q = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 + b - 2p - q \\ q = -5 + 4p \\ 2b = 1 - p \\ p + 4(-5 + 4p) = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 + b - 2p - q \\ q = -5 + 4p \\ 2b = 1 - p \\ p - 20 + 16p = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 + b - 2p - q \\ q = -5 + 4p \\ 2b = 1 - p \\ 17p = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 + b - 2p - q \\ q = -5 + 4p \\ 2b = 1 - p \\ p = \dfrac{25}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 + b - \dfrac{50}{17} - q \\ q = -5 + \dfrac{100}{17} \\ 2b = 1 - \dfrac{25}{17} \\ p = \dfrac{25}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = b - \frac{16}{17} - q \\ q = \frac{15}{17} \\ 2b = -\frac{8}{17} \\ p = \frac{25}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = b - \frac{16}{17} - \frac{15}{17} \\ q = \frac{15}{17} \\ b = -\frac{4}{17} \\ p = \frac{25}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{4}{17} - \frac{31}{17} \\ q = \frac{15}{17} \\ b = -\frac{4}{17} \\ p = \frac{25}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{35}{17} \\ q = \frac{15}{17} \\ b = -\frac{4}{17} \\ p = \frac{25}{17} \end{cases}$$

Odpowiedź. $\boldsymbol{x = -2\frac{1}{17} - \frac{4}{17}i}$; $\boldsymbol{y = 1\frac{4}{17} + \frac{15}{17}}$

Zadanie 2.

Niech a i b będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi oraz n będzie najmniejszą możliwą liczbą całkowitą taką, że:

$$(a + bi)^n = (a - bi)^n$$

Wyznacz $n = \frac{b^2}{a^2}$

Odpowiedź. $\boldsymbol{n = 0}$; $\boldsymbol{b = 0}$; $\boldsymbol{a \neq 0}$

Zadanie 3.

Rozwiąż równanie:

$$z \cdot \bar{z} + (z - \bar{z}) = 3 + 2i$$

Rozwiązanie

Niech

$$z = a + bi$$

Wówczas

$$\bar{z} = a - bi$$

Nasze równanie przyjmie postać

$$(a + bi)(a - bi) + \big((a + bi) - (a - bi)\big) = 3 + 2i$$

$$a^2 + b^2 + (a + bi - a + bi) = 3 + 2i$$

$$a^2 + b^2 + 2bi = 3 + 2i$$

Po rozdzieleniu części rzeczywistej i urojonej otrzymujemy

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 3 \\ 2b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 3 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 1 = 3 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -\sqrt{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

Odpowiedź. $\boldsymbol{z = \sqrt{2} + i}$; $\quad$ $\boldsymbol{lub}$ $\quad$ $\boldsymbol{z = -\sqrt{2} + i}$

Zadanie 4.

Wyznacz:

$$(1 + i)^n \qquad dla \qquad n \in \{1; 2; 3; 4\}$$

Czy dostrzegłeś jakąś prawidłowość? Jeśli tak, spróbuj ją opisać.

Rozwiązanie

$$(1 + i)^1 = 1 + i$$

$$(1 + i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$$

$$(1 + i)^3 = (1 + i)^2(1 + i) = 2i(1 + i) = -2 + 2i$$

$$(1+i)^4 = ((1+i)^2)^2 = (2i)^2 = -4$$

Odpowiedź. Dla czterech zadanych wartości n otrzymujemy liczby: zespolona, urojona, zespolona i całkowita. Czy ta prawidłowość się powtarza proponujemy wykonać potęgi dla kolejnych wartości n.

Zadanie 5.

Wyraź $\sin 4x$ za pomocą $\sin x \quad i \quad \cos x$.

Rozwiązanie

Niech:

$$z = (\cos x + i \sin x)$$

Wówczas:

$$z^4 = (\cos 4x + i \sin 4x).$$

Z drugiej strony

$$z^4 = (\cos x + i \sin x)(\cos x + i \sin x)(\cos x + i \sin x)(\cos x + i \sin x) =$$

$$= (\cos x + i \sin x)^2 (\cos x + i \sin x)^2 =$$

$$= (\cos^2 x + 2i \sin x \cos x - \sin^2 x)(\cos^2 x + 2i \sin x \cos x - \sin^2 x) =$$

$$= \left((\cos^2 x - \sin^2 x) + 2i \sin x \cos x\right)^2 =$$

$$= (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 + 4i(\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x \cos x - 4\sin^2 x \cos^2 x =$$

$$= ((\cos^2 x - \sin^2 x)^2 - 4\sin^2 x \cos^2 x) + 4i(\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x \cos x$$

Odpowiedź. $\sin 4x = 4(\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x \cos x$

Zadanie 6.

Rozwiąż poniższe równania:

a) $z^5 - (1+i) = 0$ b) $(2+i)z^2 - (5-i)z + (2-2i) = 0$

Rozwiązanie

a)

$$|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Więc

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Nasze równanie ma 5 pierwiastków

$$z_1 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi}{20} + i\sin\frac{\pi}{20}\right)$$

$$z_2 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{20} + i\sin\frac{9\pi}{20}\right)$$

$$z_3 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{20} + i\sin\frac{17\pi}{20}\right)$$

$$z_4 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{20} + i\sin\frac{25\pi}{20}\right) = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt[10]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt[5]{8}}{2} - \frac{\sqrt[5]{8}}{2}$$

$$z_5 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{33\pi}{20} + i\sin\frac{33\pi}{20}\right)$$

b) $(2+i)z^2 - (5-i)z + (2-2i) = 0$

Doprowadzimy nasze równanie kwadratowe do postaci kanonicznej

$$(2+i)z^2 - (5-i)z + (2-2i) = 0 \qquad /:(2+i)$$

$$z^2 - \frac{5-i}{2+i}z + \frac{2-2i}{2+i} = 0$$

$$z^2 - \frac{(5-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}z + \frac{2(1-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = 0$$

$$z^2 - \frac{10-5i-2i-1}{4+1}z + \frac{2(2-i-2i-1)}{4+1} = 0$$

$$z^2 - \frac{9-7i}{5}z + \frac{2(1-3i)}{5} = 0$$

$$z^2 - \frac{2(9-7i)}{10}z + \frac{2-6i}{5} = 0$$

$$\left(z - \frac{9-7i}{10}\right)^2 - \left(\frac{9-7i}{10}\right)^2 + \frac{2-6i}{5} = 0$$

$$\left(z - \frac{9-7i}{10}\right)^2 - \frac{81-126i-49}{100} + \frac{40-120i}{100} = 0$$

$$\left(z - \frac{9-7i}{10}\right)^2 - \frac{32-126i}{100} + \frac{40-120i}{100} = 0$$

$$\left(z - \frac{9-7i}{10}\right)^2 - \left(\frac{32-126i}{100} - \frac{40-120i}{100}\right) = 0$$

$$\left(z - \frac{9-7i}{10}\right)^2 - \frac{(32-126i)-(40-120i)}{100} = 0$$

$$\left(z - \frac{9-7i}{10}\right)^2 - \frac{32-126i-40+120i}{100} = 0$$

$$\left(z-\frac{9-7i}{10}\right)^2-\frac{-8-6i}{100}=0$$

Wyznaczmy teraz $\sqrt{-8-6i}$.

Niech

$$a+bi=\sqrt{-8-6i}$$

Wówczas

$$(a+bi)^2=-8-6i$$

$$a^2+2abi-b^2=-8-6i$$

$$\begin{cases}a^2-b^2=-8\\ 2ab=-6\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2-b^2=-8\\ ab=-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=-1\\ b=3\end{cases}\quad lub\quad \begin{cases}a=1\\ b=-3\end{cases}$$

Powróćmy do naszego równania

$$\left(z-\frac{9-7i}{10}\right)^2-\left(\frac{-1+3i}{10}\right)^2=0\quad lub\quad \left(z-\frac{9-7i}{10}\right)^2-\left(\frac{1-3i}{10}\right)^2=0$$

$$\left(z-\frac{9-7i}{10}-\frac{-1+3i}{10}\right)\left(z-\frac{9-7i}{10}+\frac{-1+3i}{10}\right)=0$$

$$\left(z+\frac{-9+7i}{10}+\frac{1-3i}{10}\right)\left(z+\frac{-9+7i}{10}+\frac{-1+3i}{10}\right)=0$$

$$\left(z+\frac{-8+4i}{10}\right)\left(z+\frac{-10+10i}{10}\right)=0$$

$$z=\frac{4-2i}{5}\quad lub\quad z=1-i$$

Lub

$$\left(z-\frac{9-7i}{10}-\frac{1-3i}{10}\right)\left(z-\frac{9-7i}{10}+\frac{1-3i}{10}\right)=0$$

$$\left(z+\frac{-9+7i}{10}+\frac{-1+3i}{10}\right)\left(z+\frac{-9+7i}{10}+\frac{1-3i}{10}\right)=0$$

$$\left(z+\frac{-10+10i}{10}\right)\left(z+\frac{-8+4i}{10}\right)=0$$

Odpowiedź. $z=\frac{4-2i}{5}\quad lub\quad z=1-i$

Zadanie 7.

Oblicz:

a) $\sqrt{1-i}$ b) $\sqrt{3-4i}$

Rozwiązanie

a)

$$|1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{1-i} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}\right)$$

Lub

$$\sqrt{1-i} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{8} + i\sin\frac{15\pi}{8}\right)$$

b)

$$\sqrt{3-4i} = -2+i \quad lub \quad \sqrt{3-4i} = 2-i$$