Wielomiany

Zadanie 1.

Liczba $\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 + ax + b$ o współczynnikach całkowitych. Znajdź a i b oraz pozostałe pierwiastki tego wielomianu.

Rozwiązanie

Mamy $W(\sqrt{2}) = 0$, czyli $2\sqrt{2} + \sqrt{2}a + b = 0$, $\sqrt{2}(2 + a) + b = 0$.

Skoro $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną, to $2 + a = 0$ (dlaczego?).

Zatem $a = -2$ i w konsekwencji $b = 0$. Mamy teraz wielomian:

$$W(x) = x^3 + 2x = x(x^2 - 2) = x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}),$$

którego pierwiastkami są liczby: 0, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$.

Zadanie 2.

Wielomian $W(x)$ o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartość 1 dla czterech różnych argumentów całkowitych. Wykaż, że dla żadnego argumentu całkowitego wielomian $W(x)$ nie przyjmuje wartości -1.

Rozwiązanie

Rozpatrzmy wielomian $W(x) = -1$. Wielomian ten przyjmuje wartość zero dla czterech różnych argumentów (całkowitych) a, b, c, d. Zatem jest on podzielny przez dwumiany:

$$x - a,\ x - b,\ x - c,\ x - d.$$

Skoro liczby a, b, c, d są różne, to wielomian $W(x) - 1$ jest podzielny przez wielomian $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$, czyli:

$$W(x) - 1 = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)P(x),$$

gdzie $P(x)$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych (dlaczego?).

Gdyby $W(x_o) = -1$ dla pewnego całkowitego x_o, to:

$$-2 = (x_o - a)(x_o - b)(x_o - c)(x_o - d)P(x_o).$$

Liczba -2 musi więc być iloczynem czterech różnych liczb całkowitych $x_o - a$, $x_o - b$, $x_o - c$, $x_o - d$ oraz liczby całkowitej $P(x_o)$. Jest to niemożliwe, gdyż liczbę -2 można przedstawić jako iloczyn co najwyżej trzech różnych liczb całkowitych, na przykład $-2 = -1 \cdot 1 \cdot 2$.

Zadanie 3.

Wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ma pierwiastek potrójny $x = 1$. Wyznacz a, b, c.

Rozwiązanie

Mamy równość:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x+1)^3 \text{ dla } x \in R \text{ (dlaczego?).}$$

Zatem $x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ dla $x \in R$.

Stąd łatwo wynika, że $a = 3$, $b = 3$, $c = 1$.

Zadanie 4.

Wielomian $W(x) = x^3 + ax + b$ ma trzy pierwiastki tworzące ciąg arytmetyczny o różnicy 1. Wyznacz a i b oraz pierwiastki tego wielomianu.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez $x_o - 1,\ x_o,\ x_o + 1$ pierwiastki wielomianu $W(x)$ tworzące ciąg arytmetyczny o różnicy 1. Wtedy:

$$\big(x - (x_o - 1)\big)(x - x_o)\big(x - (x_o + 1)\big) = x^3 + ax + b \text{ dla } x \in R \text{ (dlaczego?).}$$

Po przekształceniach powyższej równości otrzymujemy równość:

$$x^3 - 3x_o x^2 + (3{x_o}^2 - 1)x - {x_o}^3 + x_o = x^3 + ax + b \text{ dla } x \in R.$$

Przez porównanie odpowiednich współczynników otrzymujemy układ równości:

$$\begin{cases} -3x_o = 0 \\ 3{x_o}^2 - 1 = a \\ -{x_o}^3 + x_o = b \end{cases}.$$

Z pierwszej równości wyznaczamy $x_o = 0$. Po podstawieniu do dwóch pozostałych równości otrzymujemy: $-1 = a$ i $0 = b$, czyli $a = -1$ i $b = 0$.

Zadanie 5.

Dana jest liczba naturalna $n > 0$. Wielomian W stopnia $n-1$ spełnia warunki $W(k) = \frac{1}{k}$ dla $k = 1, 2, \dots, n$. Wyznacz $W(n+1)$.

Rozwiązanie

Rozważmy wielomian $U(x) = xW(x) - 1$ (stopień U wynosi n – dlaczego?). Mamy:

$$U(k) = kW(k) - 1 = k \cdot \frac{1}{k} - 1 = 1 - 1 = 0 \text{ dla } k = 1, 2, \dots, n.$$

Zatem na mocy twierdzenia Bézouta mamy równość:

$$U(x) = c(x-1)(x-2)\dots(x-n), \text{ gdzie } c \text{ to stała różna od zera (uzasadnij dlaczego).}$$

Stąd:

$$U(n+1) = c \cdot n \cdot (n-1) \dots \cdot 1 = c \cdot n!$$

Mamy również:

$$U(0) = c \cdot (-1) \cdot (-2) \dots \cdot (-n) = c \cdot (-1)^n \cdot n!$$

Z drugiej strony:

$$U(0) = 0 \cdot W(0) - 1 = -1.$$

Zatem:

$$c \cdot (-1)^n \cdot n! = -1,$$

skąd:

$$c = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}.$$

Wobec tego:

$$U(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}(x-1)(x-2)\dots(x-n),$$

a więc:

$$U(n+1) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} n! = (-1)^{n+1}.$$

W konsekwencji:

$$W(n+1) = \frac{U(n+1)+1}{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}+1}{n+1}.$$

Zadanie 6.

Niech $n > 0$ będzie liczbą naturalną. Znajdź resztę z dzielenia wielomianu $(2x+1)^n$ przez wielomian $x^2 + x$.

Rozwiązanie

Sposób I.

Niech r oznacza resztę z dzielenia n przez 2, czyli $n = 2k + r$, gdzie $k \in N$ i $r \in \{0, 1\}$. Mamy modulo $x^2 + x$:

$$(2x+1)^n = (2x+1)^{2k+r} = (2x+1)^r \cdot (2x+1)^{2k} = (2x+1)^r \cdot (4x^2+4x+1)^k =$$
$$= (2x+1)^r \cdot (4(x^2+x)+1)^k \equiv (2x+1)^r \cdot 1^k = (2x+1)^r.$$

Odpowiedź. Jeśli n jest parzyste, to poszukiwana reszta wynosi $(2x+1)^0 = 1$, a jeśli n jest nieparzyste, to poszukiwana reszta wynosi $(2x+1)^1 = 2x+1$.

Sposób II.

Zapisujemy dzielenie zresztą:

$(2x+1)^n = (x^2+x)P(x) + ax + b,$

gdzie $P(x)$ jest pewnym wielomianem, zaś $ax+b$ jest poszukiwaną resztą. Podstawiamy kolejno $x=0$ oraz $x=-1$, otrzymując równości:

$$\begin{cases} 1^n = 0 \cdot P(0) + a \cdot 0 + b \\ (-1)^n = 0 \cdot P(-1) + a \cdot (-1) + b \end{cases},$$

czyli $b=1$ i $a = b + (-1)^{n+1} = 1 + (-1)^{n+1}$.

Zatem poszukiwana reszta wynosi:

$$R(x) = ax + b = (1 + (-1)^{n+1})x + 1,$$

a więc:

$$R(x) = (1-1)x + 1 = 1, \text{ dla } n \text{ parzystego,}$$

$$R(x) = (1+1)x + 1 = 2x+1, \text{ dla } n \text{ nieparzystego.}$$

Zadanie 7.

Niech $n > 0$ będzie liczbą naturalną. Wykaż, że wielomian $x+1$ jest dzielnikiem wielomianu x^n+1 wtedy i tylko wtedy, gdy n jest nieparzyste

Rozwiązanie

Mamy modulo $x+1$:

$x+1 | x^n + 1 \Leftrightarrow x^n + 1 \equiv 0 \Leftrightarrow \big((x+1)-1\big)^n + 1 \equiv 0 \Leftrightarrow (-1)^n + 1 \equiv 0 \Leftrightarrow n$ jest nieparzyste.

Zadanie 8.

Dla jakich liczb naturalnych n zachodzi podzielność $x^2+x+1 \mid x^n+x+1$?

Rozwiązanie

Niech r będzie resztą z dzielenia n przez 3, czyli $n = 3k + r$, gdzie $k \in N$ i $k \in (0,1,2)$. Z artykułu „Kongruencje dla wielomianów” z 67. wydania *Świata Matematyki* wnosimy, że:

$$x^{3k} \equiv 1 \ (mod\ x^2+x+1).$$

Zatem:

$$x^n + x + 1 = x^{3k+r} + x + 1 = x^{3k} \cdot x^r + x + 1 \equiv$$
$$\equiv 1 \cdot x^r + x + 1 \ (mod\ x^2+x+1) \equiv x^r + x + 1 \ (mod\ x^2+x+1).$$

Mamy do rozpatrzenia trzy przypadki:

1° $r=0$, wtedy $x^r + x + 1 = x^0 + x + 1 = x + 2$ i podzielność przez x^2+x+1 nie zachodzi,

2° $r=1$, wtedy $x^r + x + 1 = x^1 + x + 1 = 2x + 1$ i podzielność przez x^2+x+1 nie zachodzi,

3° $r=2$, wtedy $x^r + x + 1 = x^2 + x + 1$ i podzielność przez x^2+x+1 jest oczywista.

Odpowiedź: $n = 3k + 2$ dla $k \in N$.

Zadanie 9.

Niech p, q, r będą liczbami naturalnymi. Wykaż, że $x^2+x+1 \mid x^{3p}+x^{3q+1}+x^{3r+2}$.

Rozwiązanie

Mamy:

$x^{3p} \equiv 1 \ (mod\, x^2+x+1)$, $x^{3q} \equiv 1 \ (mod\, x^2+x+1)$, $x^{3r} \equiv 1 \ (mod\, x^2+x+1)$.

Zatem modulo x^2+x+1 mamy:

$$x^{3p}+x^{3q+1}+x^{3r+2} = x^{3p}+x^{3q}\cdot x+x^{3r}\cdot x^2 \equiv 1+1\cdot x+1\cdot x^2 =$$
$$= 1+x+x^2 \equiv 0 \ (mod\, x^2+x+1).$$

Zadanie 10.

Niech $p, q \geq 2$ będą liczbami naturalnymi. Wykaż, że:

$x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+x+1 \mid x^{km-1}+x^{km-2}+\cdots+x+1.$

Rozwiązanie

Podana podzielność jest równoważna podzielności:

$$(x-1)\left(x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+x+1\right) \mid (x-1)\left(x^{km-1}+x^{km-2}+\cdots+x+1\right),$$

skąd:

$$x^k-1 \mid x^{km}-1 \text{ (dlaczego?).}$$

Stosując kongruencję, mamy:

$x^{km}-1 = \left(x^k\right)^m-1 = \left(\left(x^k-1\right)+1\right)^m-1 \equiv 1^m-1 \equiv 0 \ \left(mod\, x^k-1\right).$

Zatem $x^k-1 \mid x^{km}-1$, a to mieliśmy wykazać.