Zadania na ferie

Zadanie 1.

Państwo Abaccy, Babaccy oraz Cabaccy urządzili przyjęcie, na którym na powitanie każda z rodzin wymienia uściski dłoni z wszystkimi członkami dwóch pozostałych rodzin. Nikt nie ściska rąk z członkami własnej rodziny. W sumie nastąpiły sto czterdzieści dwa uściski rąk.
Przyjmujemy, że liczba członków rodziny Abackich jest co najmniej równa liczbie członków rodziny Babackich oraz, że liczba członków rodziny Babackich jest co najmniej równa liczbie członków rodziny Cabackich.
Z ilu osób składa się każda rodzina obecna na przyjęciu?

Rozwiązanie

Oznaczmy ilość członków rodziny Abackich, Babackich oraz Cabackich, obecnych na przyjęciu, odpowiednio jako x, y oraz z.
Z warunku problemu:

$$xy + yz + zx = 142,$$

oraz

$$x \geq y \geq z \geq 1.$$

Zatem, musimy mieć:

$$142 = xy + yz + zx \geq z^2 + z^2 + z^2 = 3z^2$$
$$z^2 \leq 48,$$

tak więc:

$$z \leq 6.$$

Następnie:

$$xy + yz + zx = 142,$$

tak więc:

$$xy + yz + zx + z^2 = 142 + z^2,$$
$$(x + z)(y + z) = 142 + z^2 \text{ (i)}$$

Stosownie do tego, dla $z \geq 2$, każde $x + y$ oraz $y + z$ musi wynosić co najmniej 4.
Dla $z = 3$, 5 zauważamy, że prawa strona (i) jest liczbą pierwszą. Stanowi to sprzeczność.
Podstawiając z kolei: $z = 2$, 4 lub 6 zauważamy, że dla żadnego z tych przypadków, zarówno $x + z$ jak i $y + z$ są większe od 4. Stanowi to sprzeczność.
Dla $z = 1$, otrzymujemy:

$$(x + 1)(y + 1) = 143,$$

a ponieważ $x \geq y \geq z \geq 1$, to wynika z tego, że:

$$(x + 1) \geq (y + 1) \geq 2$$

Jest to możliwe tylko wtedy, gdy:

$$(x + 1, y + 1) = (13, 11),$$

dając:

$$(x, y) = (12, 10)$$

Czyli, rodziny Abackich, Babackich oraz Cabackich, obecne na przyjęciu, składały się z odpowiednio: 10, 12 oraz 1 członków.

Zadanie 2.

Podczas lekcji z niesforną klasą, nauczyciel wraz z uczniem zapisał na tablicy poprawnie wykonane mnożenie, widoczne po prawej stronie. Nagle, gdy nauczyciel się obrócił do klasy, uczeń starł z tablicy niektóre cyfry. Jakie to były cyfry?

```
   ??7
 x 3??
 -----
  ?0?3
  ?1?
 ?5?
 -----
 ?7??3
```

Rozwiązanie

Na początku, wstawmy litery w miejsce znaków zapytania.

```
  AB7
x 3CD
-----
 E0F3
 G1H
I5J
-----
K7LM3
```

7xD kończy się na 3, więc D = 9. AB7x9 musi mieć 0 na drugim miejscu; dla B = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, mamy A = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8 (ale pierwsza możliwość (A=0) nie jest zwykle dozwolona).
AB7x3 musi mieć długość tylko trzech cyfr, więc AB = 11 lub 22, lecz tylko 117x3 ma 5 na drugim miejscu.
Wreszcie, 117xC musi mieć 1 na drugim miejscu, więc C = 1, i otrzymujemy:

```
  117
x 319
-----
 1053
 117
351
-----
37323
```

Zadanie 3.

Jaka jest najmniejsza liczba, zwana magiczną liczbą, spełniająca następujące warunki?

- Jest to liczba dodatnia
- Nie jest podzielna przez jakąkolwiek liczbę poniżej 20 (wykluczając 1)
- Średnia cyfr jest liczbą parzystą pomiędzy 3 oraz 9

Rozwiązanie

Średnia cyfr jest liczbą parzystą pomiędzy 3 oraz 9, tak więc możliwości są następujące:
Średnia = 4. Możliwości = 17, 71, 35, 53, 44, 26, 62. Tylko 71 oraz 53 spełniają podane warunki, a najmniejsza z nich to 53.
Średnia = 6. Możliwości = 39, 93,48, 84, 57, 75, 66. Każda z nich jest podzielna przez liczbę mniejszą od 20, czyli występuje tu sprzeczność.
Średnia = 8. Możliwości = 79, 97, 88. Tylko 79 oraz 97 są prawidłowe, a 79 jest najmniejszą liczbą.

Zatem, na podstawie powyższych przypadków, mamy 53 oraz 79 jako najmniejsze liczby, z czego 53 jest najmniejsza, czyli poszukiwana liczba wynosi 53.

Zadanie 4.

Marek napisał na kartce pewną liczbę. Jeżeli przesuniemy na początek cyfrę 3, położoną na końcu tej liczby, to otrzymamy liczbę taką samą, jak po pomnożeniu jej (początkowej liczby) przez 3. Jaką liczbę zapisał Marek?

Rozwiązanie

Istnieje standardowy sposób rozwiązywania takich zadań typu „przesuń na początek”. Załóżmy, ze rozwiązaniem jest liczba abc…3 i niech X będzie ułamkiem łańcuchowym 0.abc…3abc…3abc…3…

Wtedy, (X+3)/10 = 0.3abc…3abc…3abc…, co musi równać się 3X.

Wyrównując, otrzymujemy X = 3/29, które okazuje się być równe:

0.1034482758620689655172413793...,

tak więc poszukiwana liczba wynosi:

1034482758620689655172413793.

Zadanie 5.

Pewien turniej szachowy posiadał zasadę, iż przegrywający partię wypadał z całego turnieju. Odpowiedz na pytania:

(A) Jeżeli rozgrywanych było w sumie piętnaście partii, to ilu graczy wzięło udział w turnieju?
(B) Jeżeli pięćdziesięciu graczy wzięło udział w turnieju, to ile szachowych partii rozegrano?

Rozwiązanie

(A) To jest turniej eliminujący przegranych, czyli będzie tylko jeden zwycięzca. Czyli ilość graczy równa się: 15 + 1 = 16.

(B) Ilość meczy będzie zawsze o jeden mniej niż ilość graczy, czyli: 49.

Zadanie 6.

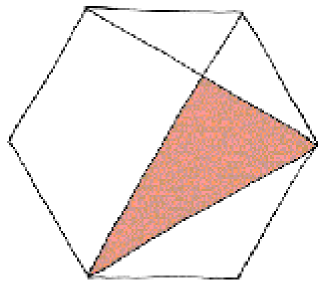
W sklepie wystawiono na sprzedaż nowe słuchawki z upustem 20% jako promocję. O ile procent cena słuchawek musi być ponownie zwiększona, aby osiągnęła pierwotną cenę?

Rozwiązanie

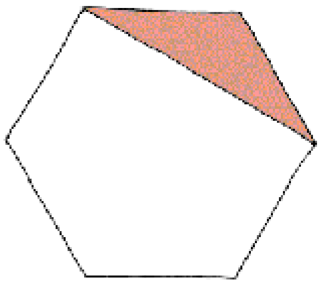
Odpowiedź: 25%.

Przypuśćmy, że cena artykułu wynosi 10 zł i zostaje obniżona o 20%; wtedy cena obniży się do 8 zł. Teraz, aby sprzedać za pierwotną cenę musimy dodać 2 zł więcej, czyli 25% z 8 zł.

Zadanie 7.



1. Rysunek powyżej przedstawia sześciobok foremny. Jaką część całej powierzchni zajmuje zaznaczone pole?



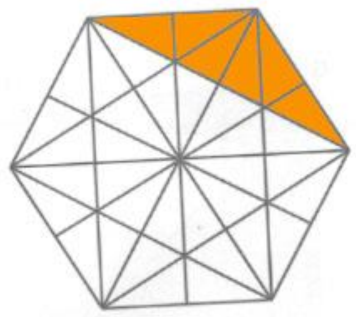
2. Jaki procent powierzchni powyższego sześcioboku foremnego jest zacieniona? Podaj wynik całkowity.

Rozwiązanie

(1)

Gdy podzielimy sześciobok na trójkąty równoboczne , to kolorowe pole zajmuje 9 części z 36 części, więc zajmuje ono ¼ całej powierzchni.

(2)



Z 36 trójkątów 6 jest zacienionych. Procent kolorowej powierzchni 6/36*100=16,66%, czyli 17%