Poszukiwania funkcji

Zadanie 1.

Niech:

$$f(\ln x) = x^2 + x + 1 \qquad dla \qquad x > 0.$$

Znajdź $f(x)$.

Rozwiązanie:

Zastosujmy podstawienie:

$$x = e^y$$

Otrzymujemy wtedy kolejno

$$f(lne^y) = (e^y)^2 + e^y + 1$$

$$f(ylne) = e^{2y} + e^y + 1$$

$$f(y) = e^{2y} + e^y + 1$$

Po zmianie nazwy argumentu mamy:

$$f(x) = e^{2x} + e^x + 1$$

Zadanie 2.

Wyznacz funkcję $f(x)$ wiedząc, że prawdziwe jest równanie

$$2f(x) + f(1 - x) = x^2$$

dla $x \in R, i$

$$f: R \to R$$

Rozwiązanie:

Zastosujmy podstawienie

$$y = 1 - x$$

Wówczas

$$x = 1 - y$$

Otrzymamy wówczas równanie

$$2f(1 - y) + f(y) = (1 - y)^2$$

Po zmianie nazwy zmiennej i spotęgowaniu prawej strony otrzymujemy

$$f(x) + 2f(1 - x) = x^2 - 2x + 1$$

Po dopisaniu równania wyjściowego otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} f(x) + 2f(1-x) = x^2 - 2x + 1 \\ 2f(x) + f(1-x) = x^2 \end{cases}$$

Przemnóżmy drugie równanie przez (-2)

$$\begin{cases} f(x) + 2f(1-x) = x^2 - 2x + 1 \\ -4f(x) - 2f(1-x) = -2x^2 \end{cases}$$

Dodajemy oba równania stronami

$$-3f(x) = -x^2 - 2x + 1$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

Zadanie 3.

Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon R \to R$ takie, że dla wszystkich $x; y \in R$ zachodzi

$$f(x)f(y) - xy = f(x) + f(y) - 1$$

Rozwiązanie:

Przyjmijmy podstawienie

$$y = x$$

Otrzymamy

$$f^2(x) - x^2 = 2f(x) - 1$$

$$f^2(x) - 2f(x) - x^2 + 1 = 0$$

$$\Delta = 4 + 4x^2 - 4 = 4x^2$$

$$\sqrt{\Delta} = 2x$$

$$f(x) = \frac{2-2x}{2} = 1 - x \quad lub \quad f(x) = \frac{2+2x}{2} = x + 1$$