Zadania Ptolemeusza

Zadanie 1.

Wyznacz wartości: $\sin 108°$; $\cos 108°$; $\tan 108°$

Rozwiązanie

Skorzystamy z zadania 3 rozwiązanego w artykule „Narzędzia Ptolemeusza". Wyznaczyliśmy w nim: $\sin 36°$; $\cos 36°$; $\tan 36°$. Ponieważ dopełnieniem kąta 36° do kąta prostego jest kąt 54° więc:

$$\sin 54° = \cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$\cos 54° = \sin 36° = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\tan 54° = \frac{\sin 54°}{\cos 54°} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{4}}{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{5\cdot\left(10+2\sqrt{5}\right)}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{\left(10-2\sqrt{5}\right)\cdot\left(10+2\sqrt{5}\right)}} = \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{100-20}} =$$

$$= \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{80}} = \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}}{20} = \frac{\sqrt{\left(50+10\sqrt{5}\right)\cdot 5}+\sqrt{\left(10+2\sqrt{5}\right)\cdot 5}}{20} =$$

$$= \frac{\sqrt{250+50\sqrt{5}}+\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{20} = \frac{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{20}$$

Zauważmy teraz, że:

$$\sin 108° = \sin(2\cdot 54°) = 2\sin 54°\cos 54° = 2\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{4}\cdot\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8} = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8} =$$

$$= \frac{\sqrt{5\cdot\left(10-2\sqrt{5}\right)}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8} = \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}$$

$$\cos 108° = \cos(2\cdot 54°) = \cos^2 54° - \sin^2 54° = \left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{10-2\sqrt{5}}{16} - \frac{5+2\sqrt{5}+1}{16} = \frac{(10-2\sqrt{5})-(6+2\sqrt{5})}{16} = \frac{4-4\sqrt{5}}{16} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

$$\tan 108° = \frac{\sin 108°}{\cos 108°} = \frac{\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}}{\frac{1-\sqrt{5}}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}}{1-\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2\cdot(1-\sqrt{5})} = \frac{\left(\sqrt{50-10\sqrt{5}}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)\cdot(1+\sqrt{5})}{2\cdot(1-\sqrt{5})\cdot(1+\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\left(\sqrt{50-10\sqrt{5}}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt{5}}{-8} =$$

$$= \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{50-10\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}}{-8} =$$

$$= \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{(50-10\sqrt{5})\cdot 5}+\sqrt{(10-2\sqrt{5})\cdot 5}}{-8} =$$

$$= \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{250-50\sqrt{5}}+\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{-8} =$$

$$= \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}+5\cdot\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{-8} =$$

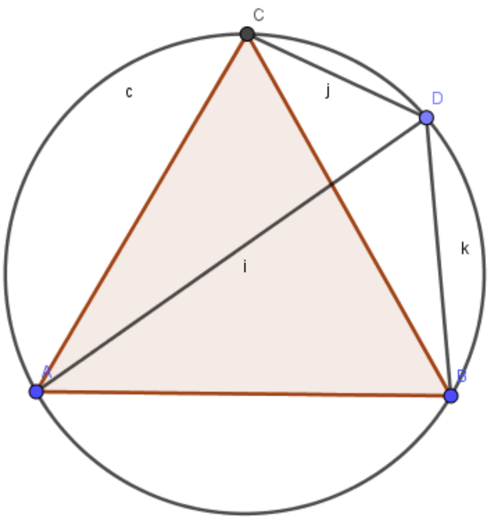
$$= \frac{2\cdot\sqrt{50-10\sqrt{5}}+6\cdot\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{-8} = \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}+3\cdot\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{-4}$$

Zadanie 2.

Na trójkącie równobocznym $\triangle ABC$ opisano okrąg, a następnie na krótszym łuku $\widehat{BC}$ obrano punkt D. Wykaż, że zachodzi równość:

$$|BD| + |CD| = |AD|$$

Rozwiązanie



Na mocy twierdzenia Ptolemeusza mamy:

$$|AC| \cdot |DB| + |AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |AD|$$

Ponieważ zachodzi równość

$$|AB| = |BC| = |AC|$$

Otrzymujemy:

$$|BD| + |CD| = |AD|$$

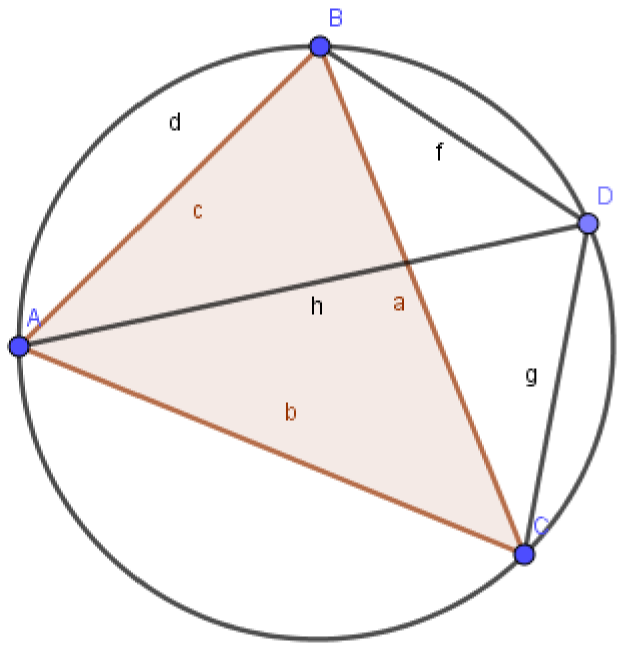
Co należało wykazać.

Zadanie 3.

Na trójkącie$\triangle ABC$ opisano okrąg, a następnie na krótszym łuku $\widehat{BC}$ obrano punkt D, tak, by odcinek AD należało dwusiecznej $\measuredangle BAC$. Wykaż, że zachodzi następująca nierówność:

$$2 \cdot |AD| > |AB| + |AC|$$

Rozwiązanie



Na mocy twierdzenia Ptolemeusza mamy:

$$|AB| \cdot |DC| + |AC| \cdot |DB| = |BC| \cdot |AD|$$

Ponieważ AD jest dwusieczną kąta BAC więc:

$$|BD| = |CD|$$

Mamy:

$$|BD| \cdot (|AB| + |AC|) = |BC| \cdot |AD|$$

Z nierówności trójkąta BCD mamy:

$$|BC| < |BD| + |CD| = 2 \cdot |BD|.$$

Tak więc:

$$|BD| \cdot (|AB| + |AC|) = |BC| \cdot |AD| < 2 \cdot |BD| \cdot |AD|.$$

Po skróceniu mamy:

$$|AB| + |AC| < 2 \cdot |AD|,$$

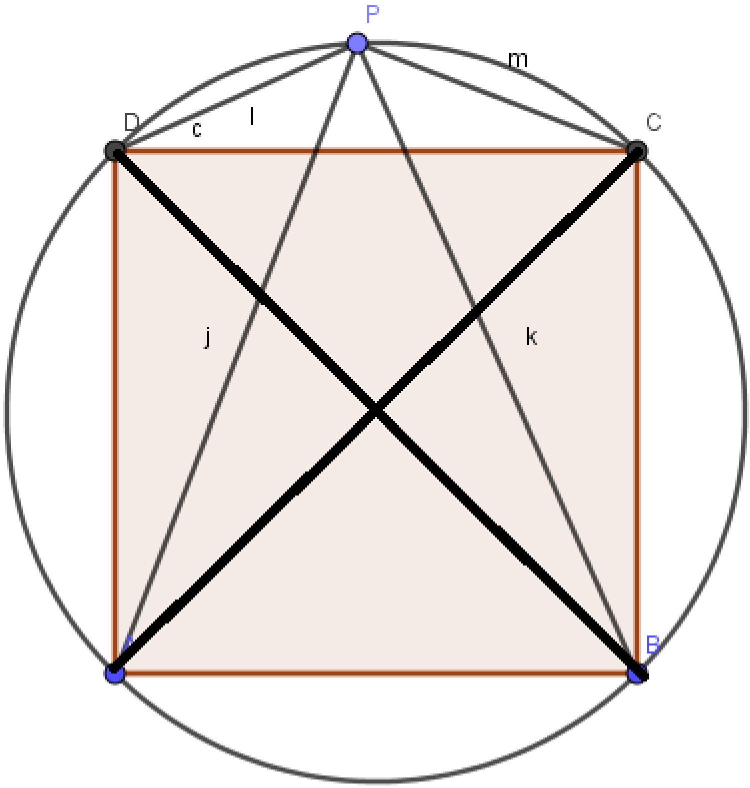
co należało wykazać.

Zadanie 4.

Na kwadracie ABCD opisano okrąg, a następnie na krótszym łuku $\widehat{CD}$ obrano punkt P. Wyznacz wszystkie możliwe wartości poniższego ilorazu:

$$\frac{|AP|+|BP|}{|CP|+|DP|}=?$$

Rozwiązanie



Zastosujmy twierdzenie Ptolemeusza do czworokąta ACPD

$$|AC|\cdot|DP|+|AD|\cdot|PC|=|DC|\cdot|AP|$$

Przyjmijmy, że bok kwadratu ma długość *a.* Wówczas otrzymana równość ma postać

$$\sqrt{2}a\cdot|DP|+a\cdot|CP|=a\cdot|AP|$$

Czyli

$$\sqrt{2}|DP|+|CP|=|AP| \qquad (*)$$

Zastosujmy twierdzenie Ptolemeusza do czworokąta BCPD

$$|BD|\cdot|CP|+|BC|\cdot|DP|=|DC|\cdot|BP|$$

Po kolejnych przekształceniach mamy

$$\sqrt{2}a\cdot|CP|+a\cdot|DP|=a\cdot|BP|$$

$$\sqrt{2}|CP|+|DP|=|BP| \qquad (**)$$

Dodajmy stronami (*) i (**)

$$\sqrt{2}|DP| + |CP| + \sqrt{2}|CP| + |DP| = |AP| + |BP|$$

$$\sqrt{2}(|DP| + |CP|) + (|DP| + |CP|) = |AP| + |BP|$$

$$(|DP| + |CP|)(\sqrt{2} + 1) = |AP| + |BP|$$

$$\sqrt{2} + 1 = \frac{|AP| + |BP|}{|DP| + |CP|}$$

Zadanie 5.

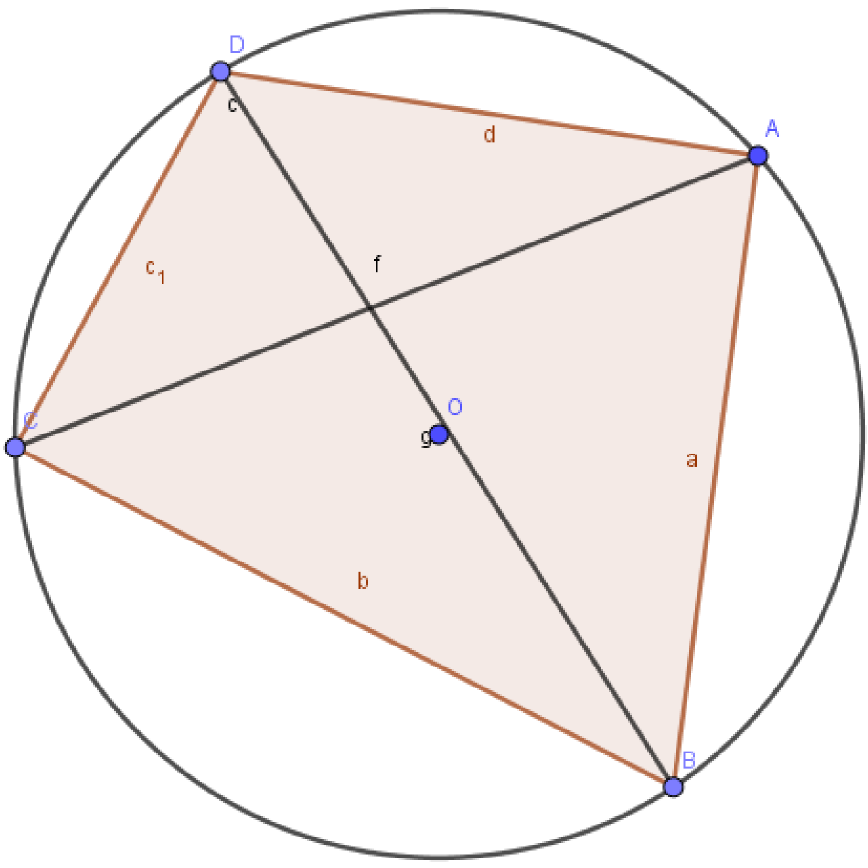
Dany jest czworokąt ABCD, na którym można opisać okrąg. Wyznacz długości jego przekątnych, gdy $|AB| = a;\ |BC| = b;\ |CD| = c\ i\ |AD| = d.$

Rozwiązanie

Uwaga

W rozwiązaniu będziemy korzystali z poniższego wzoru na pole trójkąta

$$P = \frac{abc}{4R} \quad gdzie \quad a; b; c\ to\ długości\ boków\ trójkąta, \quad a \quad R - długość\ promienia\ okręgu\ opisanego\ na\ tym\ trójkącie.$$



Z twierdzenia Ptolemeusza mamy

$$|AC| \cdot |DB| = ac + bd \qquad (*)$$

Zauważmy teraz, że zachodzi następująca równość

$$P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{BCD} = P_{ABC} + P_{ACD}$$

Na mocy tej równości mamy:

$$\frac{a \cdot d \cdot |DB|}{4R} + \frac{b \cdot c \cdot |DB|}{4R} = \frac{a \cdot b \cdot |AC|}{4R} + \frac{c \cdot d \cdot |AC|}{4R}$$

Z uwagi na fakt, że wszystkie trójkąty wpisane są w ten sam okrąg możemy napisać

$$a \cdot d \cdot |DB| + b \cdot c \cdot |DB| = a \cdot b \cdot |AC| + c \cdot d \cdot |AC|$$

$$|DB| \cdot (ad + bc) = |AC| \cdot (ab + cd)$$

Ostatecznie mamy

$$\frac{|DB|}{|AC|} = \frac{ab + cd}{ad + bc} \qquad (**)$$

Mnożąc stronami (*) przez (**) otrzymujemy

$$|AC| \cdot |DB| \cdot \frac{|DB|}{|AC|} = (ac + bd)\frac{ab + cd}{ad + bc}$$

$$|DB|^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}$$

$$|DB| = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}}$$

Dzieląc stronami drugą równość przez pierwszą mamy

$$\frac{|DB|}{|AC|} \cdot \frac{1}{|AC| \cdot |DB|} = \frac{ab + cd}{ad + bc} \cdot \frac{1}{ac \cdot bd}$$

$$\frac{1}{|AC|^2} = \frac{ab + cd}{(ad + bc)(ac + bd)}$$

Obracając obie strony równości mamy

$$|AC|^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}$$

$$|AC| = \sqrt{\frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}}$$