Poszukiwania

Zadanie 1.

Oblicz pochodną *n*-tego rzędu funkcji:

$$f(x) = e^x \cdot x^n \quad \left(x \in R,\ n \in N^+\right).$$

Wskazówka: $(e^x)' = e^x$ i zastosuj wzór Leibniza.

Odpowiedź:

$$f^{(n)}(x) = n!e^x \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \frac{1}{i!} \cdot x^i.$$

Zadanie 2.

Wykaż, że:

(a) $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^k \cdot k = 2n \cdot 3^{n-1}$, (b) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \binom{n}{k} \cdot 2^k \cdot k = (-1)^{n-1} \cdot 2n$.

Rozwiązanie

Mamy:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k x^k \cdot 1^{n-k} = (2x+1)^n,$$

czyli:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k x^k + 1 = (2x+1)^n.$$

Obliczamy pochodną obu stron:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k \cdot k \cdot x^{k-1} = 2n(2x+1)^{n-1}.$$

(a) Następnie przyjmujemy, że x = 1:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^k \cdot k = 2n \cdot 3^{n-1}.$$

(b) Następnie przyjmujemy, że x = –1:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^k \cdot k \cdot (-1)^{k-1} = 2n \cdot (-1)^{n-1}.$$

Zadanie 3.

Niech f(x) = cos x. Wyznacz $f^{(100)}(x)$.

Rozwiązanie

Obliczamy:

$$f^{I}(x) = -\sin x, \quad f^{II}(x) = -\cos x, \quad f^{III}(x) = \sin x, \quad f^{IV}(x) = \cos x.$$

Zauważmy, że $f^{(n+4)}(x) = f^{(n)}(x)$ dla n = 1, 2, 3, …

Zatem:

$$f^{(100)}(x) = f^{(4)}(x) = \cos x.$$

Zadanie 4.

Niech $f(x) = e^{kx}$ (k – stała). Wyznacz $f^{(n)}(x)$.

Odpowiedź: $f^{(n)}(x) = k^n e^{kx}$.