Świat funkcji

Zadanie 1.

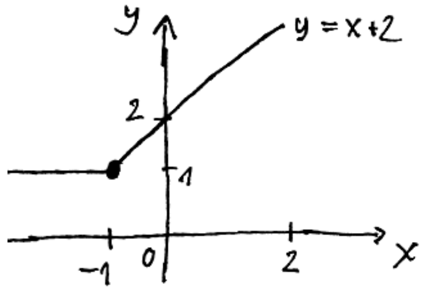
Dla jakiego *m* funkcja:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{dla } x\in(-\infty;-1) \\ x+m & \text{dla } x\in\langle -1;2\rangle \end{cases}$$

jest ciągła? Podaj interpretację graficzną rozwiązania.

Rozwiązanie

Odpowiedź: $m = 2$.



Zadanie 2.

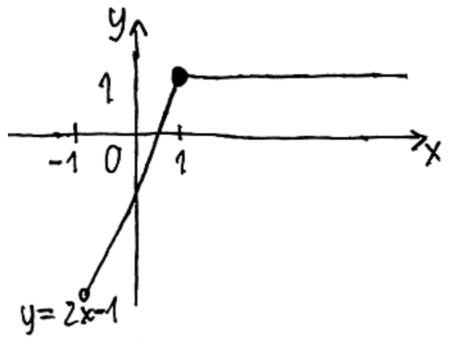
Dla jakiego *m* funkcja:

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{dla } x\in(-1;1) \\ m & \text{dla } x\in\langle 1;\infty) \end{cases}$$

jest ciągła? Podaj interpretację graficzną rozwiązania.

Rozwiązanie

Odpowiedź: m = 1.



Zadanie 3.

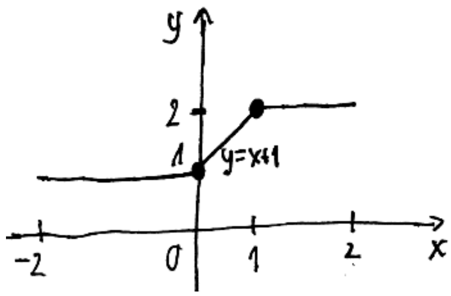
Dla jakich *k* i *m* funkcja:

$$f(x)=\begin{cases} k & \text{dla } x\in\langle -2;0) \\ x+m & \text{dla } x\in\langle 0;1) \\ k+m & \text{dla } x\in\langle 1;2\rangle \end{cases}$$

jest ciągła? Podaj interpretację graficzną rozwiązania.

Rozwiązanie

Odpowiedź: $k = 1$ i $m = 1$.



Zadanie 4.

Wykaż, że podane równania:

$$\text{(a) } x^4 + x^3 - 3 = 0, \text{ (b) } 2^x = x^3, \text{ (c) } \sin x + \cos x = 1\tfrac{1}{4}$$

mają rozwiązania.

Rozwiązanie

(a) Niech $f(x) = x^4 + x^3 - 3$ dla $x \in R$. Jest to funkcja ciągła. Mamy przy tym $f(1) = -1 < 0$ i $f(2) = 21 > 0$. Zatem na mocy własności Darboux istnieje takie $c \in (1, 2)$, że $f(c) = 0$, czyli $c^4 + c^3 - 3 = 0$.

(b) Niech $f(x) = 2^x - x^3$ dla $x \in R$. Jest to funkcja ciągła. Mamy przy tym $f(1) = 1 > 0$ oraz $f(2) = -4 < 0$. Zatem na mocy własności Darboux istnieje takie $c \in (1, 2)$, że $f(c) = 0$, czyli $2^c - c^3 = 0$, $2^c = c^3$.

(c) Niech $f(x) = \sin x + \cos x$ dla $x \in R$. Jest to funkcja ciągła. Mamy przy tym $f(0) = 1$ oraz $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}$. Skoro $1\frac{1}{4} \in (1, \sqrt{2})$, to istnieje takie $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, że $f(c) = 1\frac{1}{4}$, czyli $\sin c + \cos c = 1\frac{1}{4}$.

Zadanie 5.

Znajdź wszystkie funkcje ciągłe $f\colon R \to R^+$ spełniające równanie:

$$f(x + y) = f(x)f(y) \text{ dla } x, y \in R.$$

Rozwiązanie

Niech $g(x) = \log_2 f(x)$ dla $x \in R$. Wtedy:

$$g(x + y) = \log_2 f(x + y) = \log_2 f(x)f(y) = \log_2 f(x) + \log_2 f(y) = g(x) + g(y) \text{ dla } x, y \in R.$$

Skoro funkcja *f* jest ciągła, to funkcja *g* jest również ciągła (dlaczego?).

Funkcja *g* spełnia równanie Cauchy'ego, a zatem $g(x) = cx$ dla $x \in R$. Wobec tego $f(x) = 2^{g(x)} = 2^{cx} = a^x$ dla $x \in R$ ($a = 2^c$ jest stałą dodatnią).

Zadanie 6.

Znajdź wszystkie funkcje ciągłe $f\colon R^+ \to R$ spełniające równanie:

$$f(xy) = f(x) + f(y) \text{ dla } x, y \in R^+.$$

Rozwiązanie

Niech *s* i *t* będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Podstawmy $x = 2^s$ i $y = 2^t$. Wtedy podane równanie przyjmuje postać:

$$f(2^s \cdot 2^t) = f(2^s) + f(2^t),$$

czyli:

$$f(2^{s+t}) = f(2^s) + f(2^t).$$

Oznaczmy $g(s) = f(2^s)$ dla $u \in R$. Zatem:

$$g(s + t) = g(s) + g(t) \text{ dla } s, t \in R.$$

Skoro funkcja *f* jest ciągła, to funkcja *g* także jest ciągła (dlaczego?). Funkcja *g* spełnia równanie Cauchy'ego, a zatem $g(s) = c \cdot s$ dla $s \in R$.

Niech $x \in R^+$ będzie dowolne. Podstawmy $s = \log_2 x$. Wtedy $x = 2^s$. Wobec tego:

$$f(x) = f(2^s) = g(s) = c \cdot s = c \cdot \log_2 x \text{ dla } x \in R^+.$$