Trójki

Zadanie 1.

Wykaż, że w składzie dowolnej trójki pitagorejskiej zawsze jest jedna lub trzy liczby parzyste.

Rozwiązanie

Jedna liczba parzysta jest chociażby w trójce pitagorejskiej: 3; 4; 5. O czym się można łatwo przekonać, bo

$$3^2+4^2=9+16=25=5^2$$

Trzy liczby parzyste występują chociażby w trójce pitagorejskiej: 6; 8; 10. O czym się można łatwo przekonać, bo

$$6^2+8^2=36+64=100=10^2$$

Niech trzy liczby *a; b* i *c* tworzą trójkę pitagorejską, i niech

$$a<b<c$$

Wówczas zgodnie z definicją trójek pitagorejskich dla tych liczb zachodzą poniższe równości:

$$a^2+b^2=c^2$$

i

$$c^2-b^2=a^2$$

Załóżmy teraz, że wszystkie trzy liczby *a; b* i c są nieparzyste. Wówczas kwadraty tych liczb również są nieparzyste, ale suma i różnica dwóch liczb nieparzystych jest zawsze parzysta. Przeczy to założeniu, że wszystkie trzy liczby są nieparzyste.

Załóżmy teraz, że dwie liczby są parzyste i jedna nieparzysta. Jeżeli parzyste są liczby *a* i *b,* to z równania

$$a^2+b^2=c^2$$

Wynika, że i *c* jest liczbą parzystą, co przeczy założeniu o nieparzystości liczby *c.*

Podobnie, gdy parzyste są liczby *c* i *b,* parzysta też jest ich różnica, czyli liczba c^2.

Dowodzi to, że niemożliwe jest by wszystkie liczby z trójki pitagorejskiej były nieparzyste, lub by parzyste były tylko dwie liczby wchodzące w skład trójki pitagorejskiej.

Zadanie 2.

Wykaż, że w składzie dowolnej trójki pitagorejskiej zawsze jest jedna lub trzy liczby podzielne przez 3.

Rozwiązanie

Jedna liczba podzielna przez 3 jest chociażby w trójce pitagorejskiej: 3; 4; 5. O czym się można łatwo przekonać, bo

$$3^2+4^2=9+16=25=5^2$$

Trzy liczby podzielne przez 3 występują chociażby w trójce pitagorejskiej: 9; 12; 15. O czym się można łatwo przekonać, bo

$$9^2+12^2=81+144=225=15^2$$

Niech trzy liczby *a; b* i *c* tworzą trójkę pitagorejską, i niech

$$a<b<c$$

Wówczas zgodnie z definicją trójek pitagorejskich dla tych liczb zachodzą poniższe równości:

$$a^2+b^2=c^2$$

i

$$c^2-b^2=a^2$$

Załóżmy teraz, że dwie liczby są podzielne przez 3 i jedna niepodzielna przez 3. Jeżeli podzielne przez 3 są liczby *a* i *b,* to z równania

$$a^2+b^2=c^2$$

Wynika, że i *c* też jest liczbą podzielną przez 3, co przeczy założeniu o niepodzielności przez 3 liczby *c.*

Podobnie, gdy parzyste są liczby *c* i *b,* parzysta też jest ich różnica, czyli liczba c^2.

Załóżmy teraz, że wszystkie trzy liczby *a; b* i c są niepodzielne przez 3, czyli są postaci

$$3n+1 \qquad lub \qquad 3n+2$$

Ich kwadraty będą zaś postaci:

$$(3n+1)^2=9n^2+6n+1 \qquad lub \qquad (3n+2)^2=9n^2+12n+4=(9n^2+12n+3)+1$$

Czyli kwadrat każdej liczby naturalnej niepodzielnej przez 3 jest postaci $3n+1$.

Tak więc

$$a^2+b^2=(3n+1)+(3m+1)=3n+3m+2$$

Ale liczba postaci $3k+2$ nie jest kwadratem żadnej liczby naturalnej, co przeczy założeniu.

Dowodzi to, że niemożliwe jest by wszystkie liczby z trójki pitagorejskiej były niepodzielne przez 3, lub by podzielne przez 3 były tylko dwie liczby wchodzące w skład trójki pitagorejskiej.