Na trzy

Wyznacz wszystkie możliwe trójki liczbowe (x; y; z) spełniającenastępujący układ równań:

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=3 \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z}=3 \\ x^2\sqrt{x}+y^2\sqrt{y}+z^2\sqrt{z}=3 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Dodając pierwsze oraz trzecie równanie oraz odejmując drugie otrzymujemy:

$3 + 3 - 2(3) = (1 + x^2 - 2x)\sqrt{x} + (1 + y^2 - 2y)\sqrt{y} + (1 + z^2 - 2z)\sqrt{z}$

Lub

$(x - 1)^2 \sqrt{x} + (y - 1)^2 \sqrt{y} + (z - 1)^2 \sqrt{z} = 0$

Każdy z trzech wyrazów nie jest ujemny. Dlatego też,

$(x - 1)^2 \sqrt{x} = (y - 1)^2 \sqrt{y} = (z - 1)^2 \sqrt{z} = 0$

Dlatego też, x, y oraz z muszą wynosić 0 lub 1.

(1, 1, 1) jest to jedyne rozwiązanie, z ośmiu możliwych, spełniające trzy równania.