Poszukiwania

Zadanie 1.

Niech p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 będą takimi liczbami pierwszymi, że liczby:

$$p_1,\ p_2^2,\ p_3,\ p_4^2,\ p_5$$

tworzą rosnący ciąg arytmetyczny. Oznaczmy:

$$q = p_1^{60} * p_2^{60} * p_3^{20} * p_4^{30} * p_5^{24}$$

oraz:

$$a_1 = p_1\,q; \quad a_2 = p_2^2\,q; \quad a_3 = p_3\,q; \quad a_4 = p_4^2\,q; \quad a_5 = p_5\,q.$$

Uzasadnij, że wyraz a_k jest k-tą potęgą liczby naturalnej dla k = 1, 2, 3, 4, 5. Podaj przykład takich liczb pierwszych p_1, p_2, p_3, p_4, p_5.

Odpowiedź: $p_1 = 13$, $p_2 = 5$, $p_3 = 37$, $p_4 = 7$, $p_5 = 61$.

Zadanie 2.

Przedstaw liczbę 32 jako sumę dwóch liczb pierwszych wszystkimi sposobami.

Rozwiązanie

32 = 3 + 29 = 7 + 25 = 13 + 19.

Zadanie 3.

Przedstaw liczbę 31 jako sumę trzech liczb pierwszych nieparzystych wszystkimi sposobami.

Rozwiązanie

31 = 3 + 5 + 23 = 3 + 11 + 17 = 5 + 7 + 19 = 5 + 13 + 13 = 7 + 7 + 17 = 7 + 11 + 13.

Zadanie 4.

Znajdź wszystkie liczby naturalne n ≥ 0, dla których ułamki:

(a) $\frac{n+6}{n+2}$, (b) $\frac{2n+1}{n+1}$, (c) $\frac{n+7}{n+1}$, (d) $\frac{4n+1}{3n+2}$

są całkowite.

Odpowiedź: (a) n = 0 lub n = 2, (b) n = 0, (c) n = 0 lub n = 1 lub n = 2 lub n = 5, (d) n = 1.

Zadanie 5.

Dana jest liczba naturalna k > 0. Znajdź taką liczbę naturalną n, że liczba:

$$\text{(a) } k^2+2+\frac{1}{n}, \qquad \text{(b) } k^2+1+\frac{1}{n}$$

jest kwadratem liczby wymiernej.

Rozwiązanie

Skorzystamy z opracowania „Ułamek mieszany - kwadratem liczby wymiernej".

(a) Mamy równanie (*) Pella $p^2-(k^2+2)q^2=1$. Odgadujemy $p=k^2+1$ i $q=k$. Następnie obliczamy $n=q^2=k^2$. Sprawdzenie:

$$k^2+2+\frac{1}{n}=k^2+2+\frac{1}{k^2}=\frac{k^4+2k^2+1}{k^2}=\left(\frac{k^2+1}{k}\right)^2.$$

(b) Mamy równanie (*) Pella $p^2-(k^2+1)q^2=1$. Odgadujemy $p=2k^2+1$ i $q=2k$. Następnie obliczamy $n=q^2=4k^2$. Sprawdzenie:

$$k^2+1+\frac{1}{n}=k^2+1+\frac{1}{4k^2}=\frac{4k^4+4k^2+1}{4k^2}=\left(\frac{2k^2+1}{2k}\right)^2.$$