Wyznaczanie

Zadanie 1.

154-cyfrowa liczba 192021222…939495 została utworzona przez wypisanie kolejno liczb całkowitych od 19 do 95. Następnie usunięto z tej liczby dziewięćdziesiąt pięć (95) cyfr tak, by otrzymana w ten sposób 59-cyfrowa liczba miała możliwie największą wartość. Znajdź dziewiętnaście (19) początkowych cyfr tej nowej liczby? Spróbuj znaleść rozwiązanie bez komputera.

Rozwiązanie

Szukamy (154 - 95)-cyfrową liczbę, czyli 59-cyfrową liczbę.

2-cyfrowe liczby od 19 do 89 zawierają tylko osiem 9 i pozostaje tylko 12 cyfr od 90, czyli w jakimś miejscu należy raczej zacząć szukać ósemek, niż dziewiątek.

Spójrzmy na oryginalną 154-cyfrową liczbę:

1920212223242526272829303132333435363738394041424344454647484950515253545556575859606162636465666768697071727374757677787980818283848586878889909192939495

Pierwsza 9 jest na pozycji drugiej, pozostawiając 152 cyfr do utworzenia naszej 59-cyfrowej liczby (liczymy pozycje od lewej).

Kontynuujemy w ten sposób, z tym, że po znalezieniu piątej 9 na pozycji 82, jeżeli uwzględnimy jeszcze jedną 9 (na pozycji 102), to pozostałoby nam tylko 52 cyfr, ale mielibyśmy tylko 6 cyfr nowego numeru, i dlatego nie znajdziemy szukane 59.
Dlatego też, jako następną cyfrę wybierzemy 8 na pozycji 100. Obecnie, mamy 6 cyfr, zabierając 0 z pozycji 102 daje nam 7 cyfrę. Następnie, pozostałe 52 cyfr skompletuje naszą 59-cyfrową liczbę:

99999897071727374757677787980818283848586878889909192939495

Z czego pierwsze 19 stanowią: **9999989707172737475.**

Zadanie 2

Wyznacz listę wszystkich możliwych trójek pitagorejskich (a; b; c) przy czym $0<a<b<c<100$, takich, że otrzymamy dalsze trójki pitagorejskie (p; q; r) poprzez umieszczenie takiej samej niezerowej cyfry na lewo od każdego: a; b oraz c. Dla przypomnienia trójka pitagorejska to trzy liczby całkowite dodatnie a; b; c takie, że $a^2 + b^2 = c^2$. Poniżwj zamieszczamy kilka przykładów trójek/liczb pitagorejskich

A	3	5	6	7	8	9
B	4	12	8	24	15	12
c	5	13	10	25	17	15

Rozwiązanie

Ponieważ a, b oraz c są wszystkie przeważnie 2-cyfrowymi liczbami, to istnieją tylko trzy przypadki do rozpatrzenia:

1. a, b, c mają tę samą ilość cyfr (1 lub 2)
2. a oraz b mają 1 cyfrę, lecz c ma 2.
3. a ma 1 cyfrę, natomiast b oraz c mają 2 cyfry.

Przypadek 1)

Cyfra k daje nam równanie: (a + 100k)^2 + (b + 100k)^2 = (c + 100k)^2 (kiedy a, b, c są 2-cyfrowe. Ta sama logika obowiązuje dla 1-cyfrowych, z tym, że należy zastosować 10k zamiast 100k).

Rozszerzamy wyrazy i odejmujemy a^2 + b^2 po lewej stronie oraz c^2 po prawej stronie, gdyż a, b, c jest trójką pitagorejską.

200ka + 200kb + 2*100*100*k^2 = 200kc + 100*100*k^2

Rozwiązujemy ze względu na k (niezerowe); dzielimy wszystko przez 200k oraz przegrupujemy wyrazy:

c + 50k = a + b + 100k
50k = c - (a + b)

Jednak a, b, c są bokami trójkąta i dlatego suma dowolnych dwóch boków jest większa od trzeciego boku.
W szczególnym przypadku: a + b > c, i prawa strona jest ujemna oraz k musi być ujemne. Nie możemy mieć ujemną cyfrę, tak więc nie ma rozwiązań w przypadku 1).

Przypadek 2)

Rozważmy liczby po dodaniu cyfry k. Przekształcone a oraz b wynoszą każde co najwyżej 100 i dlatego suma ich kwadratów wynosi co najwyżej 10000. Lecz c wynosi przynajmniej 110 (będąc 2 cyfry wcześniej względem umieszczanego na wstępie/początku k) i dlatego przekształcona prawa strona jest zawsze większa od przekształconej lewej strony. Nie ma rozwiązań dla przypadku 2).

Przypadek 3)

Stosujemy tę samą strategię jak w przypadku 1), mamy obecnie:

(a + 10k)^2 + (b + 100k)^2 = (c + 100k)^2

20ka + 100k^2 + 200kb + 100*100*k^2 = 200kc + 100*100*k^2

Usuwamy identyczne wyrazy i dzielimy przez 20k, aby otrzymać:

a + 5k + 10b = 10c

5k = 10(c-b) - a

k = 2(c-b) - a/5

Obecnie, założyliśmy, iż a jest liczbą o pojedynczej cyfrze, oraz a > 0, dlatego aby k było liczbą całkowitą, istnieje tylko jedna możliwość: a = 5.
Tylko jeden pitagorejski trójkąt ma najkrótszy bok wynoszący 5 i jest to trójkąt (5, 12, 13).
W tym przypadku, c – b = 1, oraz k = 2(13-12) – 5/5 = 1.

(5, 12, 13), które staje się (15, 112, 113), stanowi jedyne rozwiązanie, gdy a, b, c są wszystkie < 100.

Jako zasadę ogólną problemu, domniemywam, iż wszystkie rozwiązania dla problemów związanych z pitagorejską trójką liczbową (bez żadnych ograniczeń odnośnie ilość cyfr) przekształcające się w nową trojkę liczbową poprzez umieszczanie na wstępie/początku tę samą cyfrę k dla wszystkich trzech wyrazów mają postać (5*10^j, 12*10^j, 13*10^j)

Zadanie 3.

Wyznacz siedmiocyfrową liczbę *ABCDEFG,* w której każda litera oznacza cyfrę (nie wszystkie cyfry muszą być różne) oraz $A \neq 0$taką, że:

$$\frac{ABCDEFG}{FGABCDE} = \frac{5}{12} \qquad oraz \qquad \frac{FEGABCD}{DEFGABC} = \frac{51}{29}$$

Rozwiązanie

Poszukiwana liczba to 1673640.

Wyjaśnienie: Z warunków problemu: EFGABCD / DEFGABC = 51/29;

lub, (10* EFGABC + D) / (1,000,000*D + EFGABC) = 51/29;

lub, EFGABC / D = 213389 (po uproszczeniu)

lub, EFGABC = 213389*D ---------- (#).

Również, ABCDEFG / FGABCDE = 5/12

lub, (100*ABCDE + FG) / (100,000*FG + ABCDE) = 5/12

lub, ABCDE / FG = 2092/5

lub, niechaj FG = 5*y, dając, ABCDE = 2092*y --------- (##)

Metodą prób i błędów, można zauważyć, że rozwiązanie dla relacji (#) oraz (##) jest możliwe tylko, gdy D = 3 oraz y = 8 , dając EFGABC= 640167; D=3; ABCDE = 16736; oraz FG = 40. Tak więc poszukiwana liczba wynosi 1673640.

Zadanie 4.

Należy znaleźć dziesięciocyfrową l;iczbę *ABCDEFGHIJ,*w której wszystkie cyfry są różne i ponadto spełniające następujace warunki:

A; C; E; G oraz *I* są nieparzyste,

Liczba *HIJ* jest wielokrotnością liczby *BCD,*

Liczba *GH* jest wielokrotnością liczby *AB,*

Dla poszczególnych liczb zachodzi równość $\frac{HIJ}{BCD} = \frac{GH}{AB}$.

Rozwiązanie

Jeżeli GH / AB = HIJ / BCD = 2

Wtedy A oraz C równałyby się 1, 3, 5, 7, oraz G i I równe byłyby 3, 5, 7, 9.

B oraz D równe byłyby 6, 8, oraz J i H równe byłyby 2, 6, co nie jest możliwe.

Jeżeli GH / AB = HIJ / BCD = 3

Wtedy A = 1, 3 oraz G = 3, 9, lecz B musi być równe 2, zatem H musi być równe 6.

D musi być 8 oraz J musi być 4. W przypadku C oraz I następujące możliwości istnieją:

a) Jeżeli C równa się 1, wtedy I = 5
b) Jeżeli C równa się 3, wtedy I = 1
c) Jeżeli C równa się 5, wtedy I = 7
d) Jeżeli C równa się 7, wtedy I = 3
e) Jeżeli C równa się 9, wtedy I = 9

Przypadki b), d), oraz e) nie są możliwe. Przypadek c) uczyni H nieparzystym, skutkiem czego a) byłoby prawdziwe.

W takim razie A musi być równe 3 oraz G musi być równe 9.

Pozostałe liczby parzyste i nieparzyste E = 7, F = 0

Tak więc ABC DEF GHIJ równa się 3218709654