Trygonometria tajemnic

Rozwiąż poniższe równania trygonometryczne

a) $2\cos x + 5\sin x = 0$ b) $\sin^2 x + 2\cos x = 2$ c) $2\cos^2 x + 3\sin x = 3$

d) $3\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$ e) $\tan 2x = \tan(3x - \alpha)$ f) $7\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 4\cos^2 x = 5$

Rozwiązania

a) $2\cos x + 5\sin x = 0$

Ponieważ $\cos x = 0$ nie jest rozwiązaniem tego równania, więc można równanie obustronnie podzielić przez $\cos x$.

$$2 + 5\cdot\frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

$$2 + 5\tan x = 0$$

$$\frac{2}{5} + \tan x = 0$$

$$\tan x = -\frac{2}{5}$$

$$x = \arctan\left(-\frac{2}{5}\right) + 180°\cdot k \qquad gdzie \qquad k \in Z$$

$$x \approx -21°48'5" + 180°\cdot k$$

b) $\sin^2 x + 2\cos x = 2$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$1 - \cos^2 x + 2\cos x = 2$$

$$-\cos^2 x + 2\cos x = 1$$

$$\cos^2 x - 2\cos x = -1$$

Niech

$$\cos x = y$$

Wówczas

$$y^2 - 2y = -1$$

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

$$(y-1)^2 = 0$$

$$y = 1$$

$$\cos x = 1$$

$$x = 0° + 360° \cdot k \qquad gdzie \qquad k \in Z$$

c) $2\cos^2 x + 3\sin x = 3$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x = 3$$

$$2 - 2\sin^2 x + 3\sin x = 3$$

$$-2\sin^2 x + 3\sin x = 1$$

$$2\sin^2 x - 3\sin x = -1$$

Niech

$$\sin x = y$$

Wówczas

$$2y^2 - 3y = -1$$

$$2y^2 - 3y + 1 = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

$$\sqrt{\Delta} = 1$$

$$y = \frac{3-1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \qquad lub \qquad y = \frac{3+1}{4} = 1$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \qquad lub \qquad \sin x = 1$$

$$x = 30° + 360° \cdot k \qquad lub \qquad x = 150° + 360° \cdot k \qquad lub \qquad x = 90° + 360° \cdot k$$

$$gdzie \qquad k \in Z$$

d) $3\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$3(1 - \sin^2 x) + \sin x - 1 = 0$$

$$3 - 3\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$-3\sin^2 x + \sin x + 2 = 0$$

$$3\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$$

Niech

$$\sin x = y$$

Wówczas

$$3y^2 - y - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 + 24 = 25$$

$$\sqrt{\Delta} = 5$$

$$y = \frac{1-5}{2 \cdot 3} = -\frac{2}{3} \quad lub \quad y = \frac{1+5}{6} = 1$$

$$\sin x = -\frac{2}{3} \quad lub \quad \sin x = 1$$

$$x = arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + 360° \cdot k \quad lub \quad x = 90° + 360° \cdot k \quad gdzie \quad k \in Z$$

$$x \approx -41°48'37 + 360° \cdot k \quad \text{lub} \quad x \approx -138°11'23'' + 360° \cdot k$$

e) $\tan 2x = \tan(3x - \alpha)$

$$2x = 3x - \alpha + 180° \cdot k$$

$$-x = -\alpha + 180° \cdot k$$

$$x = \alpha + 180° \cdot k \quad gdzie \quad k \in Z$$

f) $7\sin^2 x + 3\sin x \cos x - 4\cos^2 x = 5$

Na pewno $\cos x = 0$ nie jest rozwiązaniem tego równania

$$7\sin^2 x + 3\sin x \cos x - 4\cos^2 x = 5(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$7\sin^2 x + 3\sin x \cos x - 4\cos^2 x = 5\sin^2 x + 5\cos^2 x$$

$$2\sin^2 x + 3\sin x \cos x - 9\cos^2 x = 0$$

$$2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 3\frac{\sin x}{\cos x} - 9 = 0$$

$$2\tan^2 x + 3\tan x - 9 = 0$$

Niech

$$\tan x = y$$

Wówczas

$$2y^2 + 3y - 9 = 0$$

$$\Delta = 9 + 72 = 81$$

$$\sqrt{\Delta} = 9$$

$$y = \frac{-3-9}{4} = -3 \quad lub \quad y = \frac{-3+9}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\tan x = -3 \quad lub \quad \tan x = \frac{3}{2}$$

$$x = \arctan(-3) + 180° \cdot k \quad lub \quad x = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) + 180° \cdot k$$

$$gdzie \quad k \in Z$$

$$x \approx -71°33'54 + 180° \cdot k \quad \text{lub} \quad x \approx 56°18'35'' + 180° \cdot k$$