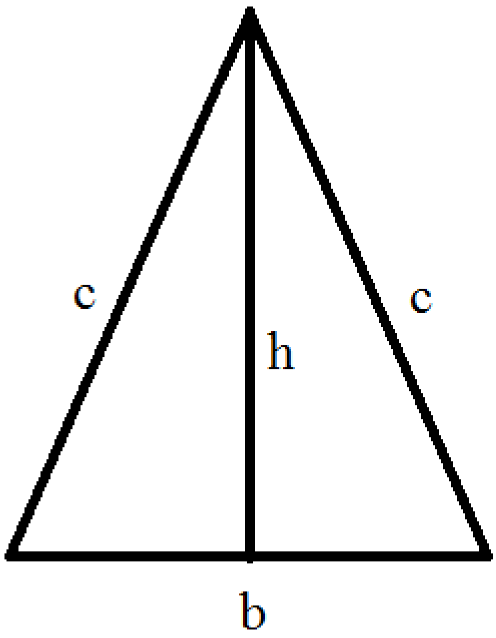
Optymalne poszukiwania

Zadanie 1.

Znajdź trójkąt równoramienny o największym polu i spróbuj je wyznaczyć, jeżeli jego obwód wynosi *a.*

Rozwiązanie



$$b + 2c = a$$

$$b = a - 2c$$

$$h = \sqrt{c^2 - \left(\frac{1}{2}b\right)^2} = \sqrt{c^2 - \frac{1}{4}b^2}$$

$$b^2 = (a - 2c)^2 = a^2 - 4ac + 4c^2$$

$$h = \sqrt{c^2 - \frac{1}{4}b^2} = \sqrt{c^2 - \frac{1}{4}(a^2 - 4ac + 4c^2)} = \sqrt{c^2 - \frac{1}{4}a^2 + ac - c^2} = \sqrt{ac - \frac{1}{4}a^2}$$

$$P(c) = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(a - 2c)\sqrt{ac - \frac{1}{4}a^2}$$

$$P'(c) = \frac{1}{2}\cdot(-2)\sqrt{ac - \frac{1}{4}a^2} + \frac{1}{2}(a - 2c)a\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{ac - \frac{1}{4}a^2}} =$$

$$= -\sqrt{ac - \frac{1}{4}a^2} + \frac{a(a - 2c)}{4\sqrt{ac - \frac{1}{4}a^2}}$$

$$\boldsymbol{P'(c) = 0}$$

$$\boldsymbol{-\sqrt{ac - \frac{1}{4}a^2} + \frac{a^2 - 2ac}{4\sqrt{ac - \frac{1}{4}a^2}} = 0}$$

$$\boldsymbol{\frac{-4\left(ac - \frac{1}{4}a^2\right) + a^2 - 2ac}{4\sqrt{ac - \frac{1}{4}a^2}} = 0}$$

$$\boldsymbol{-4\left(ac - \frac{1}{4}a^2\right) + a^2 - 2ac = 0}$$

$$\boldsymbol{-4ac + a^2 + a^2 - 2ac = 0}$$

$$\boldsymbol{-6ac = -2a^2}$$

$$\boldsymbol{c = \frac{1}{3}a}$$

$$\boldsymbol{b = a - 2c = a - \frac{2}{3}a = \frac{1}{3}a}$$

Szukany trójkąt to trójkąt równoboczny

$$\boldsymbol{P = \frac{c^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{36}}$$

Zadanie 2.

Wyznacz dwie liczby *x* i *y* w taki sposób, aby spełniały równanie: $4x + y = 1$ i aby suma ich sześcianów $x^3 + y^3$ była najmniejsza.

Rozwiązanie

$$4x + y = 1$$

$$y = 1 - 4x$$

$$y^3 = (1 - 4x)^3 = 1 - 12x + 48x^2 - 64x^3$$

$$f(x) = x^3 + y^3 = x^3 - 64x^3 + 48x^2 - 12x + 1 = -63x^3 + 48x^2 - 12x + 1$$

$$f'(x) = -189x^2 + 96x - 12$$

$$f'(x) = 0$$

$$-189x^2 + 96x - 12 = 0$$

$$63x^2 - 32x + 4 = 0$$

$$\Delta = 1024 - 1008 = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = 4$$

$$x = \frac{32 - 4}{126} = \frac{28}{126} = \frac{2}{9} \qquad lub \qquad x = \frac{32 + 4}{126} = \frac{36}{126} = \frac{2}{7}$$

$$f''(x) = -378x + 96$$

$$f''\left(\frac{2}{9}\right) = -378 \cdot \frac{2}{9} + 96 = 12$$

$$f''\left(\frac{2}{7}\right) = -378 \cdot \frac{2}{7} + 96 = -12$$

Funkcja $f(x)$ osiąga minimum dla $x = \frac{2}{9}$ bo wówczas druga pochodna jest dodatnia

$$y = 1 - 4x = 1 - 4 \cdot \frac{2}{9} = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

Szukane liczby, to $x = \frac{2}{9} \quad i \quad y = \frac{1}{9}$

Zadanie 3.

Daną liczbę dodatnią *a* należy rozłożyć na dwa składniki *x* i *y* w taki sposób, aby iloczyn $xy \cdot (x - y)$ był możliwie największy

Rozwiązanie

$$x + y = a$$

$$y = a - x$$

$$f(x) = x(a - x) \cdot (x - a + x) = (ax - x^2)(2x - a) = 2ax^2 - a^2x - 2x^3 + ax^2 =$$

$$= -2x^3 + 3ax^2 - a^2x$$

$$f'(x) = -6x^2 + 6ax - a^2$$

$$f'(x) = 0$$

$$-6x^2 + 6ax - a^2 = 0$$

$$\Delta = 36a^2 - 24a^2 = 12a^2$$

$$\sqrt{\Delta} = 2a\sqrt{3}$$

$$x = \frac{-6a - 2a\sqrt{3}}{-12} = \frac{2a(3 + \sqrt{3})}{12} = \frac{a(3 + \sqrt{3})}{6} \qquad lub \qquad x = \frac{-6a + 2a\sqrt{3}}{-12} = \frac{a(3 - \sqrt{3})}{6}$$

$$f''(x) = -12x + 6a$$

$$f''\left(\frac{a(3 + \sqrt{3})}{6}\right) = -12 \cdot \frac{a(3 + \sqrt{3})}{6} + 6a = -6a - 2a\sqrt{3} + 6a = -2a\sqrt{3}$$

$$f''\left(\frac{a(3 - \sqrt{3})}{6}\right) = -12 \cdot \frac{a(3 - \sqrt{3})}{6} + 6a = -6a + 2a\sqrt{3} + 6a = 2a\sqrt{3}$$

Funkcja $f(x)$ osiąga maximum dla $x = \frac{a(3+\sqrt{3})}{6}$

$$y = a - \frac{a(3 + \sqrt{3})}{6} = \frac{6a - 3a - a\sqrt{3}}{6} = \frac{3a - a\sqrt{3}}{6} = \frac{a(3 - \sqrt{3})}{6}$$

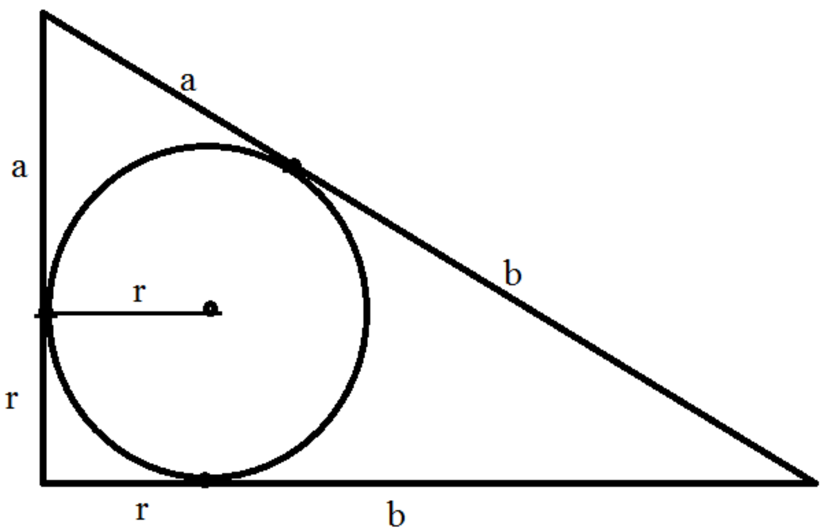
Szukane liczby, to

$$x = \frac{a(3+\sqrt{3})}{6} \qquad i \qquad y = \frac{a(3-\sqrt{3})}{6}$$

Zadanie 4.

Jak na danym kole opisać trójkąt prostokątny o możliwie najkrótszej przeciwprostokątnej?

Rozwiązanie



Z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$(r+a)^2 + (r+b)^2 = (a+b)^2$$

Wyznaczmy z tego wzoru *b*

$$r^2 + 2ra + a^2 + r^2 + 2rb + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2r^2 + 2ra + 2rb = 2ab$$

$$r^2 + ra + rb = ab$$

$$r^2 + ra = ab - rb$$

$$r(r+a) = b(a-r)$$

$$b = \frac{r(r+a)}{a-r}$$

Niech

$$f(a) = a + b = a + \frac{r(r+a)}{a-r}$$

$$f'(a) = 1 + \frac{r(a-r) - r(r+a)}{(a-r)^2} = 1 + \frac{ra - r^2 - r^2 - ra}{a^2 - 2ra + r^2} = 1 - \frac{2r^2}{a^2 - 2ra + r^2} =$$

$$= \frac{a^2 - 2ra + r^2 - 2r^2}{a^2 - 2ra + r^2} = \frac{a^2 - 2ra - r^2}{a^2 - 2ra + r^2}$$

$$f'(a) = 0$$

$$\frac{a^2 - 2ra - r^2}{a^2 - 2ra + r^2} = 0$$

$$a^2 - 2ra - r^2 = 0$$

$$\Delta = 4r^2 + 4r^2 = 8r^2$$

$$\sqrt{\Delta} = 2r\sqrt{2}$$

$$a = \frac{2r - 2r\sqrt{2}}{2} = r\left(1 - \sqrt{2}\right) < 0 \qquad lub \qquad a = \frac{2r + 2r\sqrt{2}}{2} = r\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

Ponieważ długość nie może być ujemna, więc pierwsze rozwiązanie odpada.

$$b = \frac{r(r+a)}{a-r} = \frac{r\left(r + r\left(1+\sqrt{2}\right)\right)}{r\left(1+\sqrt{2}\right) - r} = \frac{r\left(r + r + \sqrt{2}r\right)}{r + \sqrt{2}r - r} = \frac{r\left(2r + \sqrt{2}r\right)}{\sqrt{2}r} = \frac{2r + \sqrt{2}r}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}r + 2r}{2} = \sqrt{2}r + r = r\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

Warunki zadania spełnia trójkąt prostokątny równoramienny o przyprostokątnych długości

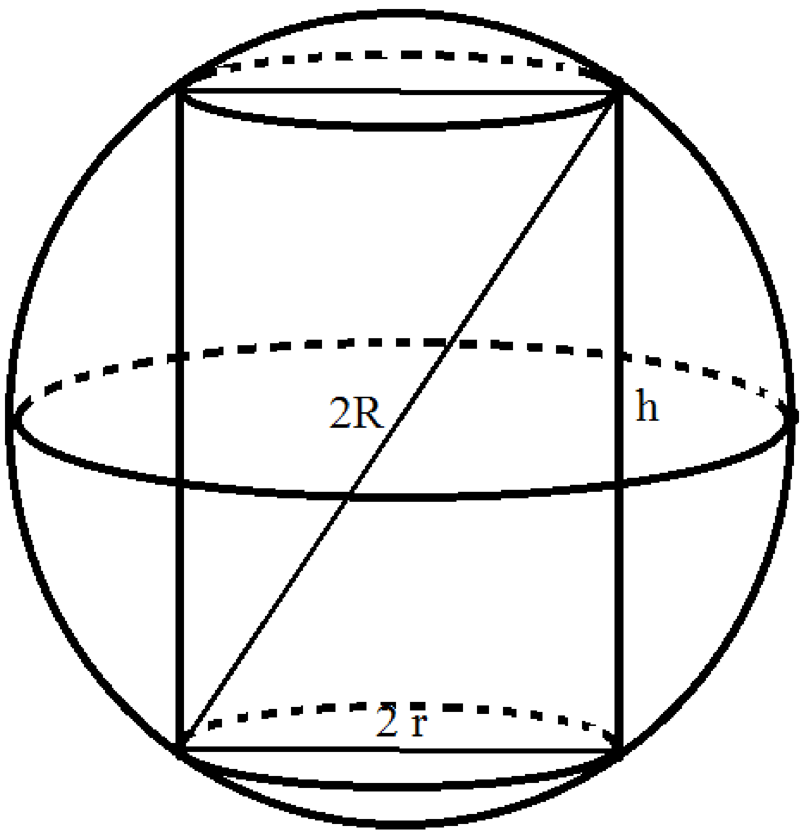
$$r\left(2 + \sqrt{2}\right)$$

I przeciwprostokątnej długości

$$2r\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

Zadanie 5.

W daną kulę należy wpisać walec o możliwie największej objętości



$$(2r)^2 + h^2 = (2R)^2$$

$$4r^2 = 4R^2 - h^2$$

$$r^2 = R^2 - \frac{1}{4}h^2$$

$$V(h) = \pi r^2 h = \pi\left(R^2 - \frac{1}{4}h^2\right)h = \pi R^2 h - \frac{1}{4}\pi h^3$$

$$V'(h) = \pi R^2 - \frac{3}{4}\pi h^2$$

$$V'(h) = 0$$

$$\pi R^2 - \frac{3}{4}\pi h^2 = 0$$

$$R^2 = \frac{3}{4}h^2$$

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2}h$$

$$h = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$$

$$V"(h) = -\frac{3}{2}\pi h$$

$$V"\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}R\right) = -\frac{3}{2}\pi \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}R = -\sqrt{3}\pi R < 0$$

Dla $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$ funkcja V osiąga maximum

$$r^2 = R^2 - \frac{1}{4}h^2 = R^2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}R^2 = R^2 - \frac{1}{3}R^2 = \frac{2}{3}R^2$$

$$r = \frac{\sqrt{6}}{3}R$$

Szukany walec ma promień podstawy równy $r = \frac{\sqrt{6}}{3}R$ i wysokość równą $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$ a jego objętość wynosi

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}R = \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi R^3$$