Cyfrowe zadanie

Zadanie 1.

Czy dla pewnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ któraś z liczb:

1) $\underbrace{66...66}_{n \text{ cyfr}}$, 2) $\underbrace{77...77}_{n \text{ cyfr}}$, 3) $\underbrace{88...88}_{n \text{ cyfr}}$, 4) $\underbrace{99...99}_{n \text{ cyfr}}$

jest kwadratem liczby naturalnej?

Rozwiązanie

Ad 1) Podana liczba jest podzielna przez 2, ale nie przez 4. Stąd odpowiedź jest negatywna.

Ad 2) Wskazówka: wykaż, że równość $\underbrace{77...77}_{n \text{ cyfr}} = (2m + 1)^2$, gdzie m ϵ N, nie zachodzi.

Ad 3) Mamy $\underbrace{88...88}_{n \text{ cyfr}} = 2^2 * 22...22$ (n cyfr). Jednak liczba 22…22 (n cyfr) nie jest kwadratem liczby naturalnej (zobacz opracowanie *Czy są takie kwadraty?*).

Ad 4) Wskazówka: wykaż, że równość $\underbrace{99...99}_{n \text{ cyfr}} = (2m + 1)^2$, gdzie m ϵ N, nie zachodzi.

Zadanie 2.

Sprawdź, że liczba 115132219018763992565095597973071522401 jest liczbą Armstronga.

Odpowiedź

Jest to największa liczba Armstronga.

Zadanie 3.

Niech A_n będzie taką liczbą naturalną, że 10^n jest dzielnikiem $A_n^2 - A_n$ oraz $B_n = 10^n + 1 - A_n$. Wykaż, że 10^n jest dzielnikiem $B_n^2 - B_n$.

Rozwiązanie

Będziemy posługiwać się kongruencjami (zobacz nr 44. Świata Matematyki).

$$B_n^2 - B_n = (10^n + 1 - A_n)^2 - (10^n + 1 - A_n) \equiv (1 - A_n)^2 - (1 - A_n) \pmod{10^n}$$

zatem:

$$B_n^2 - B_n \equiv 1 - 2A_n + A_n^2 - 1 + A_n \equiv A_n^2 - A_n \equiv 0 \pmod{10^n}$$

Stąd:

$$10^n \mid B_n^2 - B_n \, .$$

Zadanie 4.

Czy istnieje liczba naturalna (co najmniej dwucyfrowa), która jest równa iloczynowi swoich cyfr?

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że taka liczba naturalna $A_1A_2 \ldots A_n$ (n-cyfrowa, $n \geq 2$) istnieje, przy czym $A_1 \neq 0$. Mamy:

$$A_1A_2...A_n \geqslant A_1\underbrace{00...0}_{n-1 \text{ zer}} = A_1 \cdot 10^{n-1} \quad .$$

Z drugiej strony zachodzi nierówność:

$$A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n \leqslant A_1 \cdot \underbrace{9 \cdot 9 \cdot ... \cdot 9}_{n-1 \text{ dziewatek}} = A_1 \cdot 9^{n-1} \quad .$$

Gdyby została spełniona równość

$$A_1A_2...A_n = A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n \quad ,$$

to z powyższych dwóch nierówności wynikałaby nierówność

$$A_1 \cdot 10^{n-1} \leqslant A_1 \cdot 9^{n-1} \quad ,$$

co dla $n \geq 2$ jest niemożliwe.

Odpowiedź: Taka liczba nie istnieje.

Zadanie 5.

Znajdź różne niezerowe cyfry A, B, C takie, że

$$A\underbrace{BB...B}_{n \text{ cyfr}}C : AC = B\underbrace{AA...A}_{n \text{ cyfr}}C : BC.$$

Odpowiedź: (A, B, C) = (3, 1, 5) lub (A, B, C) = (1, 3, 5).

Zadanie 6.

Niech $A_k, A_{k-1}, \ldots, A_1, A_0$ oznaczają cyfry dziesiętne. Wykaż, że suma

$A_kA_{k-1} \ldots A_1A_0 + A_0A_1 \ldots A_{k-1}A_k$

jest podzielna przez 81 wtedy i tylko wtedy, gdy suma

$A_0 + A_1 + \ldots + A_{k-1} + A_k$

jest podzielna przez 81.

Rozwiązanie

Oznaczmy:

$$S = \overline{A_k A_{k-1} \ldots A_1 A_0} + \overline{A_0 A_1 \ldots A_{k-1} A_k} \quad i \quad T = A_0 + A_1 + \ldots + A_{k-1} + A_k.$$

Obliczamy:

$$(10^k+1)T - S = (10^k+1)\sum_{i=0}^{k} A_i - \left(\sum_{i=0}^{k} A_i \cdot 10^i + \sum_{i=0}^{k} A_i \cdot 10^{k-i}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \left[(10^k+1) - (10^i + 10^{k-i}) \right] A_i = \sum_{i=0}^{k} \left[(10^k - 10^{k-i}) - (10^i - 1) \right] A_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \left(10^{k-i}(10^i - 1) - (10^i - 1) \right) A_i = \sum_{i=0}^{k} (10^i - 1)(10^{k-i} - 1) A_i .$$

Każda z liczb $10^i - 1$ i $10^{k-i} - 1$ dla $i = 0, 1, \ldots, k$ jest podzielna przez 9 (dlaczego?). Zatem ostatnia suma jest podzielna przez $9 \cdot 9 = 81$. Tym samym liczba 81 jest dzielnikiem różnicy $(10^k+1)T - S$, co zapiszemy w skrócie:

$$81 \mid (10^k+1)T - S.$$

1° Jeśli $81 \mid T$, to oczywiście $81 \mid S$.

2° Jeśli $81 \mid S$, to $81 \mid (10^k+1)T$. Zauważmy, że liczby 81 i 10^k+1 są względnie pierwsze, gdyż $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, a liczba 10^k+1 nie jest podzielna przez 3 (dlaczego?). Wobec tego $81 \mid T$.