Dawne na dzisiaj

Zadanie 1.

Znajdź x spełniające następujące nierówności:

a) $\frac{x-3}{x-5} < 0$, **b)** $\frac{x-2}{x-1} < 0$, **c)** $\frac{x-1}{3-4x} > 0$, **d)** $\frac{x+1}{2x-3} < 2$, **e)** $\frac{3x-5}{x} > 2$, **f)** $\frac{2x}{x-4} > 1$

Rozwiązanie

a) $x \neq 5$, $x - 3 \geq 0$ $x - 5 > 0$

$x \geq 3$ $x > 5$

	$(-\infty;\ 3\rangle$	3	$\langle 3;\ 5)$	$(5;\ \infty)$
$x-3$	-	0	+	+
$x-5$	-	-2	-	+
$\frac{x-3}{x-5}$	+	0	-	+

Odpowiedź

$$x \in (3; 5)$$

b) $\boldsymbol{x \neq 1}$ $\boldsymbol{x - 2 \geq 0}$ $\boldsymbol{x - 1} > 0$

$\boldsymbol{x \geq 2}$ $\boldsymbol{x} > 1$

	$(-\infty; 1)$	$(1;\ 2\rangle$	2	$\langle 2;\ \infty)$
$x-2$	-	-	0	+
$x-1$	-	+	1	+
$\frac{x-2}{x-1}$	+	-	0	+

Odpowiedź

$$\boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{1}; \boldsymbol{2})$$

c) $\boldsymbol{x} \neq \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{4}}$ $\boldsymbol{x - 1} > 0$ $\boldsymbol{3 - 4x} > 0$

$\boldsymbol{x} > 1$ $\boldsymbol{x} < \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{4}}$

	$\left(-\infty;\ \frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{4}; 1\right)$	**1**	$(\boldsymbol{1};\ \infty)$
$\boldsymbol{x-1}$	**-**	**-**	**0**	**+**
$\boldsymbol{3-4x}$	**+**	**-**	**-1**	**-**
$\frac{\boldsymbol{x-1}}{\boldsymbol{3-4x}}$	**-**	**+**	**0**	**-**

Odpowiedź

$$\boldsymbol{x} \in \left(\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{4}}; \boldsymbol{1}\right)$$

d) $x \neq \frac{3}{2}$ $\frac{x+1}{2x-3} < 2$

$$\frac{x+1}{2x-3} - 2 < 0$$

$$\frac{x+1-4x+6}{2x-3} < 0$$

$$\frac{-3x+7}{2x-3} < 0$$

$-3x + 7 \geq 0$ $2x - 3 > 0$

$x \leq \frac{7}{3}$ $x > \frac{3}{2}$

	$\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{3}\right)$	$\frac{7}{3}$	$\left(\frac{7}{3}; \infty\right)$
$-3x + 7$	+	+	0	-
$2x - 3$	-	+	$\frac{5}{3}$	+
$\frac{-3x+7}{2x-3}$	-	+	0	-

Odpowiedź

$$x < \frac{3}{2} \quad lub \quad x > \frac{7}{3}$$

e) $x \neq 0$ $\frac{3x-5}{x} > 2$

$$\frac{3x-5}{x} - 2 > 0$$

$$\frac{3x-5-2x}{x} > 0$$

$$\frac{x-5}{x} > 0$$

$$x - 5 > 0$$

$$x > 5$$

	$(-\infty; 0)$	$(0; 5)$	5	$(5; \infty)$
$x - 5$	-	-	0	+
x	-	+	5	+
$\frac{x-5}{x}$	+	-	0	+

Odpowiedź

$$x < 0 \quad lub \quad x > 5$$

f) $\boldsymbol{x \neq 4}$ $\frac{\boldsymbol{2x}}{\boldsymbol{x-4}} > 1$

$\frac{\boldsymbol{2x}}{\boldsymbol{x-4}} - \mathbf{1} > 0$

$\frac{\boldsymbol{2x-x+4}}{\boldsymbol{x-4}} > 0$

$\frac{\boldsymbol{x+4}}{\boldsymbol{x-4}} > 0$

$\boldsymbol{x + 4} > 0$ $\boldsymbol{x - 4} > 0$

$\boldsymbol{x} > -4$ $\boldsymbol{x} > 4$

	$(-\infty;\ -\mathbf{4})$	**-4**	$(-\mathbf{4}; \mathbf{4})$	$(\mathbf{4};\ \infty)$
$\boldsymbol{x + 4}$	**-**	**0**	**+**	**+**
$\boldsymbol{x - 4}$	**-**	**-8**	**-**	**+**
$\frac{\boldsymbol{x+4}}{\boldsymbol{x-4}}$	**+**	**0**	**-**	**+**

Odpowiedź

$$\boldsymbol{x} < -4 \quad lub \quad x > 4$$

Zadanie 2.

Rozwiąż równania

a) $\mathbf{4^{2x-5} = 256}$ **b)** $\mathbf{3^{x^2-2} \cdot 9^{x+3} = 27^{x+2}}$ **c)** $\mathbf{3^x + 3^{x+2} = 3\frac{1}{3}}$ **d)** $\mathbf{4^x - 3^{x-2} = 5 \cdot 3^{x-1} + 4^{x-1}}$ **e)** $\mathbf{5^{2x} - 7 \cdot 5^x = 450}$ **f)** $\mathbf{7^{2x+1} + 5 = 36 \cdot 7^x}$

Rozwiązania

a) $\mathbf{4^{2x-5} = 256}$

$$4^{2x-5} = 4^4$$

$$2x - 5 = 4$$

$$2x = 9$$

$$x = 4{,}5$$

b) $\mathbf{3^{x^2-2} \cdot 9^{x+3} = 27^{x+2}}$

$$3^{x^2-2} \cdot (3^2)^{x+3} = (3^3)^{x+2}$$

$$3^{x^2-2} \cdot 3^{2x+6} = 3^{3x+6}$$

$$3^{x^2-2+2x+6} = 3^{3x+6}$$

$$3^{x^2+2x+4} = 3^{3x+6}$$

$$x^2 + 2x + 4 = 3x + 6$$

$$x^2 + 2x + 4 - 3x - 6 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = 3$$

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \qquad lub \qquad x_2 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

c) $\mathbf{3^x + 3^{x+2} = 3\frac{1}{3}}$

$$\mathbf{3^x + 3^x \cdot 3^2 = 3\frac{1}{3}}$$

$$\mathbf{3^x + 9 \cdot 3^x = 3\frac{1}{3}}$$

Niech

$$\mathbf{3^x = y}$$

$$\mathbf{y + 9y = 3\frac{1}{3}}$$

$$\mathbf{10y = \frac{10}{3}}$$

$$\mathbf{y = \frac{1}{3}}$$

$$\mathbf{3^x = \frac{1}{3}}$$

$$\mathbf{3^x = 3^{-1}}$$

$$\mathbf{x = -1}$$

d) $\mathbf{4^x - 3^{x-2} = 5 \cdot 3^{x-1} + 4^{x-1}}$

$$\mathbf{4^x - \frac{1}{9} \cdot 3^x = \frac{5}{3} \cdot 3^x + \frac{1}{4} \cdot 4^x}$$

$$\mathbf{1 - \frac{1}{9} \cdot \frac{3^x}{4^x} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3^x}{4^x} + \frac{1}{4}}$$

$$\mathbf{1 - \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x + \frac{1}{4}}$$

$$\mathbf{1 - \frac{1}{4} = \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x + \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x}$$

$$\mathbf{\frac{3}{4} = \frac{16}{9} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x}$$

$$\mathbf{\frac{27}{64} = \left(\frac{3}{4}\right)^x}$$

$$\mathbf{\frac{3^3}{4^3} = \left(\frac{3}{4}\right)^x}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^x$$

$$x = 3$$

e) $5^{2x} - 7 \cdot 5^x = 450$

Niech

$$5^x = y$$

$$y^2 - 7y = 450$$

$$y^2 - 7y - 450 = 0$$

$$\Delta = 49 + 1800 = 1849$$

$$\sqrt{\Delta} = 43$$

$$y_1 = \frac{7-43}{2} = \frac{-36}{2} = -18 \quad lub \quad y_2 = \frac{7+43}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

Pierwsze rozwiązanie nie spełnia warunków zadania. Pozostaje więc

$$5^x = 25 = 5^2$$

$$x = 2$$

f) $7^{2x+1} + 5 = 36 \cdot 7^x$

$$7 \cdot 7^{2x} + 5 = 36 \cdot 7^x$$

Niech

$$7^x = y$$

$$7y^2 + 5 = 36y$$

$$7y^2 - 36y + 5 = 0$$

$$\Delta = 1296 - 140 = 1156$$

$$\sqrt{\Delta} = 34$$

$$y_1 = \frac{36-34}{14} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} \quad lub \quad y_2 = \frac{36+34}{14} = \frac{70}{14} = 5$$

$$7^x = \frac{1}{7} \quad lub \quad 7^x = 5$$

$$7^x = 7^{-1} \quad lub \quad x = \log_7 5$$

$$x = -1$$

Zadanie 3.

Rozwiąż poniższe układy równań

a) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 19 \\ 2^{2x} + 3^{2y} = 265 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2^{x+y} \cdot 4^{x-3y} = 16 \\ \frac{8^{2y-x}}{32^{y-2x}} = 4^{11} \end{cases}$

Rozwiązania

a) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 19 \\ 2^{2x} + 3^{2y} = 265 \end{cases}$

Niech

$$\mathbf{2^x = z \quad i \quad 3^y = t}$$

Mamy wówczas

$$\begin{cases} z + t = 19 \\ z^2 + t^2 = 265 \end{cases}$$

$$t = 19 - z$$

$$z^2 + (19 - z)^2 = 265$$

$$z^2 + z^2 - 38z + 361 = 265$$

$$2z^2 - 38z + 96 = 0$$

$$z^2 - 19z + 48 = 0$$

$$\Delta = 361 - 192 = 169$$

$$\sqrt{\Delta} = 13$$

$$z_1 = \frac{19 - 13}{2} = 3 \quad lub \quad z_2 = \frac{19 + 13}{2} = 16$$

$$t_1 = 19 - 3 = 16 \quad lub \quad t_2 = 19 - 16 = 3$$

$$\begin{cases} 2^x = 3 \\ 3^y = 16 \end{cases} \quad lub \quad \begin{cases} 2^x = 16 \\ 3^y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \log_2 3 \\ y = \log_3 16 \end{cases} \quad lub \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

b) $\begin{cases} 2^{x+y} \cdot 4^{x-3y} = 16 \\ \frac{8^{2y-x}}{32^{y-2x}} = 4^{11} \end{cases}$

$$\begin{cases} 2^{x+y} \cdot (2^2)^{x-3y} = 2^4 \\ \dfrac{(2^3)^{2y-x}}{(2^5)^{y-2x}} = (2^2)^{11} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^{x+y} \cdot 2^{2x-6y} = 2^4 \\ \dfrac{2^{6y-3x}}{2^{5y-10x}} = 2^{22} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{2^{x+y+2x-6y} = 2^4} \\ \mathbf{2^{6y-3x-5y+10x} = 2^{22}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{2^{3x-5y} = 2^4} \\ \mathbf{2^{7x+y} = 2^{22}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{3x - 5y = 4} \\ \mathbf{7x + y = 22} \end{cases}$$

$$\mathbf{y = 22 - 7x}$$

$$\mathbf{3x - 5(22 - 7x) = 4}$$

$$\mathbf{3x - 110 + 35x = 4}$$

$$\mathbf{38x = 114}$$

$$\mathbf{x = 3}$$

$$\mathbf{y = 22 - 7 \cdot 3 = 1}$$

Zadanie 4.

Rozwiąż następujące równania

a) $\log_3(5x-1) - \log_3(x-1) = 2$ b) $3\log(x+1) = \log(x^3 + 2x^2 + 4x + 7)$ c) $\frac{3-2(\log x)^2}{\log x} = 5$ d) $\frac{1}{2}\log x(\log x + 4) = 5 + \log\sqrt{x}$ e) $\begin{cases} 2\log x + 3\log y = 11 \\ 7\log x - 2\log y = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y = 15 \\ \log x + \log y = 2\log 6 \end{cases}$

Rozwiązania:

a) $\log_3(5x-1) - \log_3(x-1) = 2$

Dziedzina

$$x > \frac{1}{5} \qquad i \qquad x > 1$$

Więc

$$x > 1$$

$$\log_3 \frac{5x-1}{x-1} = \log_3 9$$

$$\frac{5x-1}{x-1} = 9$$

$$5x - 1 = 9x - 9$$

$$-4x = -8$$

$$x = 2$$

b) $3\log(x+1) = \log(x^3 + 2x^2 + 4x + 7)$

Dziedzina

$$x + 1 > 0 \qquad i \qquad x^3 + 2x^2 + 4x + 7 > 0$$

$$x > -1$$

Zamiast znajdować miejsca zerowe drugiego wielomianu, udowodnimy, że są one mniejsze od -1. W tym celu policzmy pochodną W'(x), gdy

$$W(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 7$$

$$W'(x) = 3x^2 + 4x + 4$$

Ponieważ wyróżnik Δ jest ujemny i przy x^2 stoi 3, więc $W'(x) > 0$, co oznacza, że $W(x)$ jest funkcją rosnącą.

Obliczmy $W(-1)$

$$W(-1) = -1 + 2 - 4 + 7 = 4$$

Tak więc funkcja $W(x)$ ma jedno miejsce zerowe i jest ono mniejsze od -1

Powyższe równanie, ma więc sens dla $x > -1$

$$\log(x+1)^3 = \log(x^3 + 2x^2 + 4x + 7)$$

$$\log(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = \log(x^3 + 2x^2 + 4x + 7)$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + 2x^2 + 4x + 7$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Delta = 1 + 24 = 25$$

$$\sqrt{\Delta} = 5$$

$$x = \frac{1-5}{2} = -2 \qquad lub \qquad x = \frac{1+5}{2} = 3$$

Ponieważ -2 nie należy do dziedziny więc $x = 3$

c) $\frac{3 - 2(\log x)^2}{\log x} = 5$

Dziedzina

$$x > 0 \qquad i \qquad x \neq 1$$

Niech

$$\log x = y$$

Wówczas

$$\frac{3 - 2y^2}{y} = 5$$

$$-2y^2+3=5y$$

$$2y^2+5y-3=0$$

$$\Delta=25+24=49$$

$$\sqrt{\Delta}=7$$

$$y=\frac{-5-7}{4}=-3 \quad lub \quad y=\frac{-5+7}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\log x=-3 \quad lub \quad \log x=\frac{1}{2}$$

$$x=0{,}001 \quad lub \quad x=\sqrt{10}$$

d) $\frac{1}{2}\log x(\log x+4)=5+\log\sqrt{x}$

Dziedzina

$$x>0$$

$$\frac{1}{2}\log x(\log x+4)=5+\log x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2}\log x(\log x+4)=5+\frac{1}{2}\log x$$

Niech

$$\log x=y$$

Wówczas

$$\frac{1}{2}y(y+4)=5+\frac{1}{2}y$$

$$y(y+4)=10+y$$

$$y^2+4y=10+y$$

$$y^2+3y-10=0$$

$$\Delta=9+40=49$$

$$\sqrt{\Delta}=7$$

$$y=\frac{-3-7}{2}=-5 \quad lub \quad y=\frac{-3+7}{2}=2$$

$$\log x=-5 \quad lub \quad \log x=2$$

$$x=0{,}00001 \quad lub \quad x=100$$

e) $\begin{cases} 2\log x + 3\log y = 11 \\ 7\log x - 2\log y = 1 \end{cases}$

dziedzina

$$x > 0 \quad i \quad y > 0$$

Niech $\log x = z \quad i \quad \log y = t$

wówczas

$$\begin{cases} 2z + 3t = 11 \\ 7z - 2t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14z + 21t = 77 \\ -14z + 4t = -2 \end{cases}$$

$$25t = 75$$

$$t = 3$$

$$2z + 9 = 11$$

$$2z = 2$$

$$z = 1$$

$$\log x = 1 \quad i \quad \log y = 3$$

$$x = 10 \quad i \quad y = 1000$$

f) $\begin{cases} x + y = 15 \\ \log x + \log y = 2\log 6 \end{cases}$

Dziedzina

$$x > 0 \quad i \quad y > 0$$

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ \log xy = \log 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ xy = 36 \end{cases}$$

$$y = 15 - x$$

$$x(15 - x) = 36$$

$$-x^2 + 15x = 36$$

$$x^2 - 15x + 36 = 0$$

$$\Delta = 225 - 144 = 81$$

$$\sqrt{\Delta} = 9$$

$$x = \frac{15 - 9}{2} = 3 \quad lub \quad x = \frac{15 + 9}{2} = 12$$

$$y = 12 \quad lub \quad y = 3$$