szkic rozwiązania – Jacek Kredenc

Równania dziadka

Rozwiąż układy równań

a)

$$\begin{cases} z(x+y)=35 \\ z(x+z)=40 \\ y(x+y)=28 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Podzielmy stronami pierwsze równanie przez trzecie

$$\frac{z(x+y)}{y(x+y)}=\frac{35}{28}$$

$$\frac{z}{y}=\frac{5}{4}$$

$$z=\frac{5}{4}y$$

Podstawmy wyznaczone z do równania pierwszego i drugiego

$$\frac{5}{4}y(x+y)=35$$

$$\frac{5}{4}y\left(x+\frac{5}{4}y\right)=40$$

$$\frac{5}{4}y\left(x+y+\frac{1}{4}y\right)=40$$

Przyjmijmy podstawienie

$$t=x+y$$

$$\begin{cases} \frac{5}{4}yt=35 \\ \frac{5}{4}y\left(t+\frac{1}{4}y\right)=40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{4}yt=35 \\ \frac{5}{4}yt+\frac{5}{16}y^2=40 \end{cases}$$

$$35+\frac{5}{16}y^2=40$$

$$\frac{5}{16}y^2=5$$

$$\frac{1}{16}y^2=1$$

$$y^2=16$$

$$y=4 \qquad lub \qquad y=-4$$

Przyjmijmy, że $y=4$

Mamy wówczas

$$\frac{5}{4}yt=35$$

$$5t=35$$

$$t=7$$

$$x+y=t$$

$$x+y=7$$

$$x=3$$

$$z=\frac{5}{4}y=5$$

Przyjmijmy, że $y=-4$

Mamy wówczas

$$\frac{5}{4}yt=35$$

$$-5t=35$$

$$t=-7$$

$$x+y=t$$

$$x+y=-7$$

$$x=-3$$

$$z=\frac{5}{4}y=-5$$

Odpowiedź

$$(x;y;z)=(3;4;5) \qquad lub \qquad (x;y;z)=(-3;\ -4;\ -5)$$

b)

$$\begin{cases} y^4-x^4=15 \\ y-x=1 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Wyznaczmy z drugiego równania y i wstawmy do pierwszego

$$y=1+x$$

$$y^4=1+4x+6x^2+4x^3+x^4$$

$$x^4+4x^3+6x^2+4x+1-x^4=15$$

$$4x^3+6x^2+4x-14=0$$

Jeżeli powyższe równanie ma jakieś pierwiastki to mogą być nimi liczby: -1; 1; -2; 2; -7; 7; -14; 14.

Sprawdźmy, czy -1 jest pierwiastkiem tego równania

$$4\cdot(-1)^3+6\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)-14=-4+6-4-14=-16$$

-1 nie jest pierwiastkiem tego równania.

Sprawdzamy 1

$$4+6+4-14=0$$

1 jest pierwiastkiem tego równania. Możemy więc wielomian $4x^3+6x^2+4x-14$ podzielić przez dwumian $x-1$

$$(4x^3+6x^2+4x-14):(x-1)=4x^2+10x+14$$

$$\begin{array}{l} -4x^3+4x^2 \\ \hline \quad 10x^2+4x-14 \\ \quad -10x^2+10x \\ \hline \qquad 14x-14 \\ \qquad -14x+14 \\ \hline \qquad = \quad = \end{array}$$

Jeżeli nasze równanie ma jeszcze jakieś pierwiastki to są to też pierwiastki równania

$$4x^2 + 10x + 14 = 0$$

Rozwiążmy więc to równanie

$$\Delta = 100 - 224 = -124$$

Wyróżnik jest ujemny więc równanie to nie ma więcej rozwiązań.

$$y - x = 1$$

$$y - 1 = 1$$

$$y = 2$$

Odpowiedź

Rozwiązaniem równania jest para $(x; y) = (1; 2)$

c)

$$\begin{cases} y^3 - x^3 + x^2 + y^2 - 58x + 84 = 0 \\ y - 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Z drugiego równania wyznaczmy y i wstawmy do równania pierwszego

$$y = 2x - 1$$

$$y^2 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$y^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$$

$$8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 - x^3 + x^2 + 4x^2 - 4x + 1 - 58x + 84 = 0$$

$$7x^3 - 7x^2 - 56x + 84 = 0$$

$$x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$$

Jeżeli to równanie ma pierwiastki całkowite, to znajdują się one wśród liczb: -1; 1; -2; 2; -3; 3; -4; 4; -6; 6; -12; 12.

Zacznijmy od sprawdzenia, czy pierwiastkiem jest liczba -1

$$-1 - 1 + 8 + 12 = 18$$

-1 nie jest pierwiastkiem tego równania.

Sprawdźmy więc 1

$$1-1+8+12=20$$

1 też nie jest pierwiastkiem tego równania.

Sprawdzamy -2

$$-8-4+16+12=16$$

-2 też nie jest pierwiastkiem tego równania.

Sprawdzamy 2

$$8-4-16+12=0$$

2 jest pierwiastkiem naszego równania.

Wykonajmy dzielenie

$$\begin{array}{l}
(x^3-x^2-8x+12):(x-2)=x^2+x-6 \\
\underline{-x^3+2x^2\qquad\qquad} \\
\qquad\quad x^2-8x+12 \\
\qquad\underline{-x^2+2x\qquad} \\
\qquad\qquad\quad -6x+12 \\
\qquad\qquad\quad\underline{\ \ 6x-12\ } \\
\qquad\qquad\qquad = \qquad =
\end{array}$$

Jeżeli nasze równanie ma jeszcze jakieś pierwiastki, to są to też pierwiastki równania $x^2+x-6=0$

Rozwiążmy więc to równanie

$$x^2+x-6=0$$

$$\Delta=1+24=25$$

$$\sqrt{\Delta}=5$$

$$x_1=\frac{-1-5}{2}=-3 \quad lub \quad x_2=\frac{-1+5}{2}=2$$

Jeśli $x=2$ to

$$y=2x-1=3$$

Jeśli $x=-3$ to

$$y=2x-1=-7$$

Odpowiedź

Pierwiastkami tego układu są pary:

$$(x;y)=(-3;\ -7) \qquad (x;y)=(2;3)$$

d)

$$\begin{cases} x^2-xy+4y^2=6 \\ 2x^2+5xy=18 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Ponieważ para $(0;0)$ nie jest rozwiązaniem naszego układu równań możemy przyjąć podstawienie

$$t=\frac{x}{y}$$

Oczywiście przy założeniu, że $y\neq 0$

Wówczas

$$x=ty$$

Mamy wówczas

$$\begin{cases} t^2y^2-ty^2+4y^2=6 \\ 2t^2y^2+5ty^2=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2(t^2-t+4)=6 \\ y^2(2t^2+5t)=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y^2(t^2-t+4)=18 \\ y^2(2t^2+5t)=18 \end{cases}$$

Z ostatniego układu wynika, że

$$3y^2(t^2-t+4)=y^2(2t^2+5t)$$

I dalej

$$3(t^2-t+4)=2t^2+5t$$

$$3t^2-3t+12=2t^2+5t$$

Rozwiążmy powyższe równanie

$$t^2 - 8t + 12 = 0$$

$$\Delta = 64 - 48 = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = 4$$

$$t_1 = \frac{8-4}{2} = 2 \quad lub \quad t_2 = \frac{8+4}{2} = 6$$

Musimy rozpatrzeć dwa przypadki:

Przypadek I

$$t = 2$$

$$y^2(2t^2 + 5t) = 18$$

$$y^2(2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2) = 18$$

$$y^2 \cdot 18 = 18$$

$$y^2 = 1$$

W takim razie

$$y = -1 \quad lub \quad y = 1$$

Mamy dwa podprzypadki

Podprzypadek Ia

$$y = -1$$

$$x = ty$$

$$x = 2 \cdot (-1) = -2$$

Podprzypadek Ib

$$y = 1$$

$$x = ty$$

$$x = 2 \cdot 1 = 2$$

Przypadek II

$$t = 6$$

$$y^2(2t^2 + 5t) = 18$$

$$y^2(2 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6) = 18$$

$$y^2 \cdot 102 = 18$$

$$y^2 = \frac{18}{102}$$

$$y^2 = \frac{3}{17}$$

$$y = -\sqrt{\frac{3}{17}} \quad lub \quad y = \sqrt{\frac{3}{17}}$$

Znowu mamy dwa podprzypadki

Podprzypadek IIa

$$y = -\sqrt{\frac{3}{17}}$$

$$x = ty$$

$$x = -6\sqrt{\frac{3}{17}}$$

Podprzypadek IIb

$$y = \sqrt{\frac{3}{17}}$$

$$x = ty$$

$$x = 6\sqrt{\frac{3}{17}}$$

Odpowiedź

Układ równań spełniają następujące pary liczb:

$$(x; y) = (-2;\ -1) \quad lub \quad (x; y) = (2; 1) \quad lub \quad (x; y) = \left(-6\sqrt{\frac{3}{17}};\ -\sqrt{\frac{3}{17}}\right) \quad lub \quad (x; y) = \left(6\sqrt{\frac{3}{17}};\ \sqrt{\frac{3}{17}}\right)$$