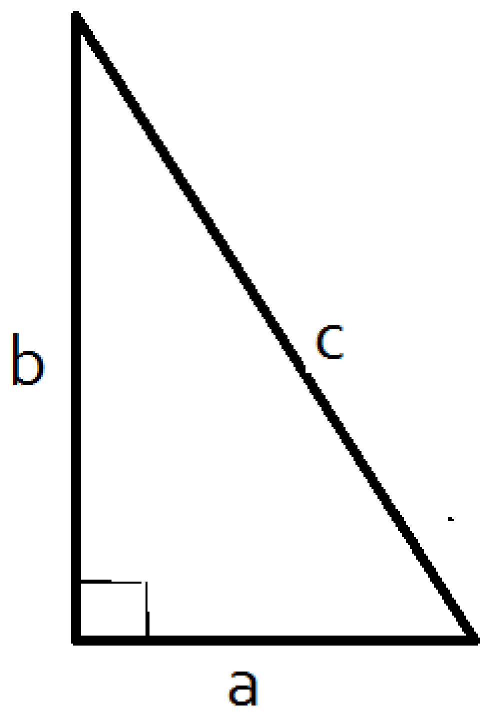
szkic rozwiązania – Jacek Kredenc

Wyznaczanie figury

Zadanie 1.

Wyznacz długość boków w trójkącie prostokątnym, jeśli obwód tego trójkąta wynosi 70, a pole powierzchni tego trójkąta wynosi 210.

Rozwiązanie



Z treści zadania wynikają następujące równania:

$$\begin{cases} a+b+c=70 \\ \dfrac{ab}{2}=210 \\ a^2+b^2=c^2 \end{cases}$$

Przekształćmy pierwsze równanie

$$a+b+c=70$$

$$c=70-(a+b)$$

Otrzymane równanie podnieśmy obustronnie do kwadratu

$$c^2 = 70^2 - 2 \cdot 70 \cdot (a+b) + (a+b)^2$$

$$c^2 = 4900 - 140a - 140b + a^2 + 2ab + b^2$$

W miejsce c^2 wstawmy lewą stronę trzeciego równania

$$a^2 + b^2 = 4900 - 140a - 140b + a^2 + 2ab + b^2$$

$$0 = 4900 - 140a - 140b + 2ab$$

Przekształćmy teraz drugie równanie

$$\frac{ab}{2} = 210$$

$$ab = 420$$

Wyznaczony iloczyn ab wstawmy do poprzedniego równania

$$0 = 4900 - 140a - 140b + 840$$

Po dalszych przekształceniach równania otrzymujemy

$$140a + 140b = 5740$$

$$140(a+b) = 5740$$

$$a + b = 41$$

Podstawiając otrzymany wynik do równania pierwszego wyznaczymy długość boku c

$$41 + c = 70$$

$$c = 29$$

Równanie

$$a + b = 41$$

Podnieśmy obustronnie do kwadratu

$$(a+b)^2 = 1681$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 1681$$

Odejmijmy obustronnie $4ab$

$$a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = 1681 - 4ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 1681 - 4 \cdot 420$$

$$(a-b)^2 = 1681 - 1680$$

$$(a-b)^2 = 1$$

Z ostatniego równania wynika

$$a - b = 1 \qquad lub \qquad a - b = -1$$

Przyjmując założenie wynikające z rysunku, czyli, że

$$a < b$$

Możemy ostatecznie zapisać

$$b - a = 1$$

Pozostaje nam do rozwiązania prosty układ

$$\begin{cases} a + b = 41 \\ b - a = 1 \end{cases}$$

Po dodaniu stronami mamy

$$2b = 42$$

$$b = 21$$

Skąd wynika, że

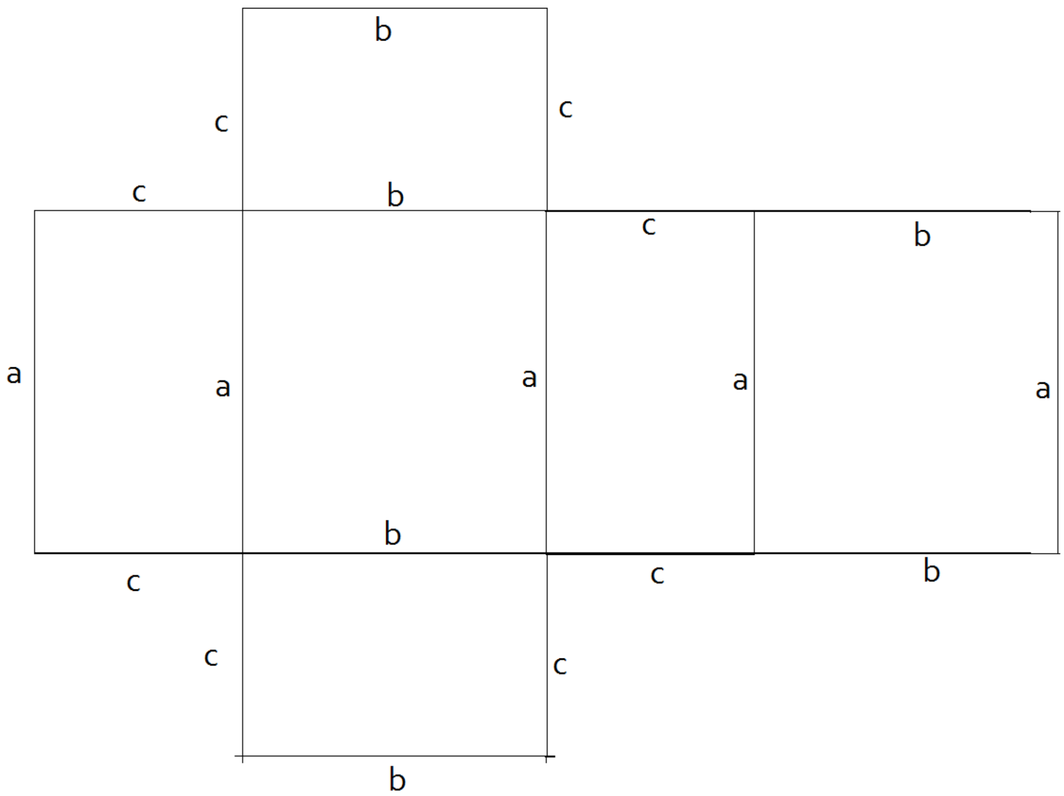
$$a = 20$$

Odpowiedź

Przyprostokątne tego trójkąta mają: 20 i 21, a przeciwprostokątna ma 29.

Zadanie 2.

Na kartce papieru formatu A4Wyrysowano siatkę graniastosłupa jak na rysunku. Znajdź wymiary tej siatki, jeśli objętość powstałego z niej graniastosłupa jest maksymalna.



Rozwiązanie

$$\boldsymbol{V = abc}$$

Gdzie

$$a + 2c = 210$$

$$a = 210 - 2c$$

I

$$2b + 2c = 297$$

$$2b = 297 - 2c$$

$$b = 148{,}5 - c$$

Tak więc

$$V = (210 - 2c)(148{,}5 - c)c$$

$$V = 2c^3 - 507c^2 + 31185c$$

Wyznaczmy pochodną funkcji V

$$V' = 6c^2 - 1014c + 31185$$

Wyznaczmy miejsca zerowe pochodnej

$$6c^2 - 1014c + 31185 = 0$$

$$\Delta = 1028196 - 748440 = 279756$$

$$\sqrt{\Delta} \approx 528{,}92$$

$$c_1 \approx \frac{1014 - 528{,}92}{12} \approx 40 \qquad lub \qquad c_2 \approx \frac{1014 + 528{,}92}{12} \approx 129$$

Ponieważ c_2 nie spełnia warunków zadania więc

$$c \approx 40 \qquad a \approx 130 \qquad b \approx 109$$