szkic rozwiązania - Witold Bednarek

Poszukiwania dla pierwszych

Zadanie 1.

Rozwiąż równanie $p + 1 = k^3$, gdzie p jest liczbą pierwszą i k jest liczbą naturalną.

Rozwiązanie

Mamy kolejno:

$$p + 1 = k^3,$$
$$p = k^3 - 1,$$
$$p = (k - 1)(k^2 + k + 1).$$

Skoro p jest liczbą pierwszą oraz $k - 1 < k^2 + k + 1$, to

$$\begin{cases} k - 1 = 1 \\ k^2 + k + 1 = p \end{cases},$$

stąd

$$\begin{cases} k = 2 \\ p = 7 \end{cases}$$

(jest to liczba pierwsza).

Zadanie 2.

Podaj przykład trójki liczb pierwszych $p < q < r$ spełniających równanie:

$$(q + a)^2 = (p + a)(r + a)$$

dla $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$.

Rozwiązanie

$a = 1$, wtedy na przykład $p = 2$, $q = 5$, $r = 11$.
$a = 2$, wtedy na przykład $p = 7$, $q = 13$, $r = 23$.
$a = 3$, wtedy na przykład $p = 2$, $q = 7$, $r = 17$.

Zadanie 3.

Dana jest liczba pierwsza p. Rozwiąż równanie:

$$x^2 - y^2 = p$$

w liczbach naturalnych $x, y > 0$.

Rozwiązanie

Mamy kolejno:

$$x^2 - y^2 = p,$$
$$(x - y)(x + y) = p.$$

Skoro p jest liczbą pierwszą oraz $0 < x - y < x + y$, to:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = p \end{cases}.$$

Stąd:

$$x = \frac{p+1}{2} \quad \text{i} \quad y = \frac{p-1}{2} \quad . (*)$$

Jeśli p = 2, to x = 3/2 i y = 1/2, i nie są to liczby całkowite. Zatem w tym przypadku podane równanie nie ma rozwiązania.
Jeśli p > 2, to liczby p + 1 i p – 1 są parzyste (dlaczego?). Zatem mamy rozwiązanie określone równościami (*).

Zadanie 4.

Rozwiąż równanie $3p + 1 = k^2$, gdzie p jest liczbą pierwszą i k jest liczbą naturalną.

Rozwiązanie

Mamy kolejno:

$$3p + 1 = k^2,$$
$$3p = k^2 - 1,$$
$$3p = (k - 1)(k + 1).$$

Skoro p jest liczbą pierwszą, to:

$$\begin{cases} k - 1 = 1 \\ k + 1 = 3p \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} k - 1 = 3 \\ k + 1 = p \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} k - 1 = p \\ k + 1 = 3 \end{cases}.$$

Stąd:

$$\begin{cases} k = 2 \\ p = 1 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} k = 4 \\ p = 5 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} p = 1 \\ k = 2 \end{cases}.$$

Ponieważ p jest liczbą pierwszą, to (p, k) = (5, 4).

Zadanie 5.

Znajdź wszystkie takie pary p, q liczb pierwszych, że:

$$4pq + 1 = k^2,$$

gdzie k jest liczbą naturalną.

Rozwiązanie

Zauważmy, że k jest nieparzyste:

$$k = 2m + 1 \ (m \in N^+).$$

Zatem mamy równanie:

$$4pq + 1 = (2m + 1)^2.$$

Stąd kolejno wynika, że:

$$4pq + 1 = 4m^2 + 4m + 1,$$
$$4pq = 4m^2 + 4m, \quad /:4$$
$$pq = m^2 + m = m(m + 1).$$

Skoro liczby p i q są pierwsze, to:

$$\begin{cases} m = p \\ m + 1 = q \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} m = q \\ m + 1 = p \end{cases} .$$

Zatem q – p = 1 lub p – q = 1. Zatem (q = 3 i p = 2) lub (p = 3 i q = 2) (dlaczego?).
Sprawdzenie pozostawiamy Czytelnikowi.

Zadanie 6.