Dla twórcy

Zadanie 1.

Wyznacz: $f+g; f-g; f\cdot g; f/g$ i określ ich dziedziny dla:

a) $f(x)=x^2+2x^2; g(x)=3x^2-1$ b) $f(x)=\sqrt{3-x}; g(x)=\sqrt{x^2-1}$

Rozwiązanie:

a) $f(x)=x^2+2x^2=3x^2;$ $Dziedziną\ są:\ \ x\in R$
$g(x)=3x^2-1;$ $Dziedziną\ są:\ \ x\in R;$
$f+g=3x^2+3x^2-1=6x^2-1;$ $Dziedziną\ są\ \ x\in R;$
$f-g=3x^2-(3x^2-1)=3x^2-3x^2+1=1;$ $Dziedziną\ są\ \ x\in R$
$f\cdot g=(3x^2)\cdot(3x^2-1)=9x^4-3x^2;$ $Dziedziną\ są\ \ x\in R$

$$\frac{f}{g}=\frac{3x^2}{3x^2-1}$$
$$3x^2-1\neq 0$$
$$3x^2\neq 1$$
$$x^2\neq\frac{1}{3}$$
$$x\neq\frac{\sqrt{3}}{3}\quad \curlyvee \quad x\neq-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Dziedziną są

$$x\in R/\left\{\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$$

b) $f(x)=\sqrt{3-x}$

$$3-x\geq 0$$
$$x\leq 3$$

Dziedziną są

$$x\leq 3$$
$$g(x)=\sqrt{x^2-1}$$
$$x^2-1\geq 0$$
$$(x-1)(x+1)\geq$$
$$(x-1\leq 0\quad\wedge\quad x+1\leq 0)\quad\vee\quad(x-1\geq 0\quad\wedge\quad x+1\geq 0)$$
$$(x\leq 1\quad\wedge\quad x\leq -1)\quad\vee\quad(x\geq 1\quad\wedge\quad x\geq -1)$$
$$x\leq -1\quad\vee\quad x\geq 1$$

Dziedziną są

$$x\leq -1\quad\vee\quad x\geq 1$$
$$f+g=\sqrt{3-x}+\sqrt{x^2-1};\quad dziedziną\ są\ \ x\in(-\infty;\ -1\rangle\cup\langle 1;3\rangle$$
$$f-g=\sqrt{3-x}-\sqrt{x^2-1};\quad dziedziną\ są\ \ x\in(-\infty;\ -1\rangle\cup\langle 1;3\rangle$$
$$f\cdot g=\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{x^2-1}=\sqrt{(3-x)(x^2-1)}=\sqrt{-x^3+3x^2+x-3}$$
$$(3-x)(x^2-1)\geq 0$$

$$(3-x)(x-1)(x+1) \geq 0$$

$$(3-x \geq 0 \land x-1 \geq 0 \land x+1 \geq 0) \lor (3-x \geq 0 \land x-1 \leq 0 \land x+1 \leq 0) \lor$$

$$\lor (3-x \leq 0 \land x-1 \geq 0 \land x+1 \leq 0) \lor (3-x \leq 0 \land x-1 \leq 0 \land x+1 \geq 0)$$

$$(x \leq 3 \land x \geq 1 \land x \geq -1) \lor (x \leq 3 \land x \leq 1 \land x \leq -1) \lor (x \geq 3 \land x \geq 1 \land x \leq -1)$$

$$\lor (x \geq 3 \land x \leq 1 \land x \geq -1)$$

$$1 \leq x \leq 3 \lor x \leq -1 \lor sprzeczność \lor sprzeczność$$

Dziedziną są

$$x \in (-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; 3\rangle$$

$$\frac{f}{g} = \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{\frac{3-x}{x^2-1}}$$

Dziedziną są

$$x \in (-\infty;\ -1) \cup (1;\ 3\rangle$$

Zadanie 2.

Wyznacz $f°g; g°f; f°f; g°g$ i określ ich dziedziny dla:

a) $f(x) = 3x+5;\quad g(x) = x^2 - x;$ b) $f(x) = \sqrt{x+1};\quad g(x) = 4x-3$

c) $f(x) = \sqrt{x};\quad g(x) = \sqrt[3]{1-x}$

Rozwiązanie:

a) $f(x) = 3x+5 \quad dla \quad x \in R$

$g(x) = x^2 - x \quad dla \quad x \in R,$

$$f°g = f\big(g(x)\big) = f(x^2-x) = 3(x^2-x)+5 = 3x^2-3x+5 \quad dla \quad x \in R$$

$$g°f = g\big(f(x)\big) = g(3x+5) = (3x+5)^2 - (3x+5) = 9x^2+30x+25-3x-5$$

$$= 9x^2+27x+20 \quad dla \quad x \in R$$

$$f°f = f\big(f(x)\big) = f(3x+5) = 3(3x+5)+5 = 9x+15+5 = 9x+20 \quad dla$$

$$x \in R$$

$$g°g = g\big(g(x)\big) = g(x^2-x) = (x^2-x)^2 - (x^2-x) = x^4-2x^3+x^2-x^2+x =$$

$$= x^4-2x^3+x \quad dla \quad x \in R$$

b) $f(x) = \sqrt{x+1};\quad dla \quad x \geq -1$

$g(x) = 4x-3 \quad dla \quad x \in R;$

$$f°g = f\big(g(x)\big) = f(4x-3) = \sqrt{(4x-3)+1} = \sqrt{4x-2};\quad dla \quad x \geq \frac{1}{2}$$

$$g°f = g\big(f(x)\big) = g\big(\sqrt{x+1}\big) = 4\sqrt{x+1}-3 \quad dla \quad x \geq -1$$

$$f°f = f\big(f(x)\big) = f\big(\sqrt{x+1}\big) = \sqrt{\sqrt{x+1}+1} \quad dla \ \ x \geq -1$$

$$g°g = g\big(g(x)\big) = g(4x-3) = 4(4x-3)-3 = 16x-12-3 = 16x-15 \quad dla$$

$$x \in R$$

c) $f(x) = \sqrt{x};\quad dla \quad x \geq 0$

$g(x) = \sqrt[3]{1-x};\quad dla \quad x \leq 1;$

$$f^\circ g = f\big(g(x)\big) = f\big(\sqrt[3]{1-x}\big) = \sqrt{\sqrt[3]{1-x}} = \sqrt[6]{1-x} \quad dla \quad x \le 1$$

$$g^\circ f = g\big(f(x)\big) = g\big(\sqrt{x}\big) = \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} \quad dla \quad 0 \le x \le 1$$

$$f^\circ f = f\big(f(x)\big) = f\big(\sqrt{x}\big) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x} \quad dla \quad x \ge 0$$

$$g^\circ g = g\big(g(x)\big) = g\big(\sqrt[3]{1-x}\big) = \sqrt[3]{1-\sqrt[3]{1-x}} \quad dla \quad 0 \le x \le 1$$

Zadanie 3.

Wyznacz $f^\circ g^\circ h$ dla: $f(x) = \sqrt{x-3}; g(x) = x^2; h(x) = x^3 + 2$

Rozwiązanie:

$$f(x) = \sqrt{x-3}; \quad dla \quad x \ge 3$$

$$g(x) = x^2; \quad dla \quad x \in R$$

$$h(x) = x^3 + 2; \quad dla \quad x \in R$$

$$f^\circ g^\circ h = f\Big(g\big(h(x)\big)\Big) = f\big(g(x^3+2)\big) = f((x^3+2)^2) = f(x^6+4x^3+4)$$
$$= \sqrt{(x^6+4x^3+4)-3} = \sqrt{x^6+4x^3+4-3}$$
$$= \sqrt{x^6+4x^3+1} \quad dla \quad -\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}+2}\right) \ge x \lor -\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\right) \le x$$

Zadanie 4.

Zapisz podaną funkcję w postaci $f \circ g$ dla:

a) $F(x) = (2x+x^2)^4$; b) $F(x) = \cos^2 x$

Rozwiązanie:

a) $F(x) = (2x+x^2)^4$

$$f(x) = x^4$$
$$g(x) = 2x + x^2$$

b) $F(x) = \cos^2 x$

$$f(x) = x^2$$
$$g(x) = \cos x$$

Zadanie 5.

Na podstawie wartości podanych w tabeli oblicz wartość wyrażenia:

a) $f(g(1))$; b) $g(f(1))$; c) $f(f(1))$; d) $g(g(1))$; e) $g \circ f(3)$;
b) f) $f \circ g(6)$

x	1	2	3	4	5	6
f(x)	3	1	4	2	2	5
g(x)	6	3	2	1	2	3

Rozwiązanie:

a) $f(g(1)) = 5$ b) $g(f(1)) = 2$ c) $f(f(1)) = 4$ d) $g(g(1)) = 3$
b) e) $g \circ f(3) = 1$ f) $f \circ g(6) = 4$