IGRZYSKA

Zadanie 1. (3 monety)

Mamy 3 monety. Jedna ma po obu stronach reszki, druga po obu stronach orły, a trzecia jest zwykła. Wybieramy losowo monetę, nie oglądając, rzucamy i... wypada orzeł. Jaka jest szansa, że po drugiej stronie jest reszka?

Rozwiązanie

Mamy do czynienia z monetami RR, 00, RO (O oznacza orła, R - reszkę). Jeżeli już wiadomo, że wybrana moneta wypadła orłem do góry, mamy 50% szans, że na drugiej stronie monety jest reszka.

Odpowiedź: 1/2.

Zadanie 2. (Mrówki na bokach trójkąta)

W trzech wierzchołkach trójkąta znajdują się mrówki. Każda z nich zaczyna się poruszać w dowolnym kierunku wzdłuż jego boków. Jaka jest szansa, że nie dojdzie do kolizji mrówek?

Rozwiązanie

Łatwo sprawdzić, że jest 8 sposobów poruszania się mrówek ze względu na kierunki ruchu. Tylko 2 z nich są bezkolizyjne. Zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi 1/4.

Zadanie 3. (Piłka czy boisko)

Przed rozpoczęciem każdego meczu piłkarskiego kapitanowie drużyn po-przez rzut monetą przez sędziego decydują, która z drużyn rozpoczyna mecz. Sędzia tym razem ma dwie niesymetryczne monety. Na jednej z nich reszka wypada z prawdopodobieństwem 2/3, a na drugiej reszka wypada z prawdopodobieństwem 1/3. Jak sprawiedliwie wylosować, która z drużyn rozpocznie mecz?

Rozwiązanie

Zauważmy, że w przypadku rzutu dwiema monetami mamy następujące rozkłady prawdopodobieństwa:

RR	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$
OR	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
RO	$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$
OO	$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

Jeżeli chcemy zachować równe szansę podczas losowania, to należy rzucać dwiema monetami. Jedna drużyna wybiera dwie reszkl, a druga dwa orty. Rzucamy do skutku, do momentu rozstrzygnięcia.

Zadanie 4. (Nietanie linie lotnicze)

Załóżmy, że w kolejce do wejścia na pokład samolotu czeka 100 osób. Każda z nich ma przyporządkowane swoje miejsce w samolocie. Dla uproszczenia powiedzmy, że osoba k w kolejce ma przyporządkowany numer miejsca k w samolocie. Pierwszy pasażer usiadł na przypadkowo wybranym miejscu. Pozostali pasażerowie są bardzo dobrze wychowani i siadają na swoich miejscach, jak są wolne, lub wybierają losowo wolne miejsce, gdy Ich miejsce jest zajęte. Jakie są szansę, że pasażer nr 100 usiądzie na swoim miejscu?

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że jest dwóch pasażerów. Wówczas pasażer nr 2 ma 50% szans na zajęcie swojego miejsca. Obecnie założymy, że pasażerów jest trzech. Wszystkie możliwe układy zajęcia miejsc ilustruje tabelka.

M1	M2	M2
1	2	3
2	1	3
3	1	2
3	2	1

Prawdopodobieństwo, że pasażer nr 3 zajmie swoje miejsce, jest równe 2/4.

Przypadek czterech pasażerów również ilustrujemy tabelą.

M1	M2	M3	M4
1	2	3	4
2	1	3	4
3	1	2	4
4	1	2	3
4	1	3	2
3	2	1	4
4	2	1	3
4	2	3	1

Pasażer nr 4 ma szansę równe 1/2 na zajęcie swojego miejsca.

A teraz przypadek pięciu pasażerów.

M1	M2	M3	M4	M5
1	2	3	4	5
2	1	3	4	5
4	1	2	3	5
5	1	2	3	4
4	1	3	2	5
5	1	3	2	4
5	1	4	2	3
4	1	5	2	3
3	1	4	2	5
3	1	5	2	4
3	2	1	4	5
4	2	1	3	5
5	2	1	3	4
5	2	3	1	4
4	2	3	1	5
5	2	3	4	1

Prawdopodobieństwo znów wynosi $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$. Proponujemy Czytelnikowi wykazanie, że ostatni wchodzący pasażer, bez względu na liczbę pasażerów, zajmie swoje wyznaczone miejsce z prawdopodobieństwem 0,5.

Zadanie 4. (Całoroczna gra w kości)

Adam l Bogdan przez wiele miesięcy w roku grali w następującą grę. Adam rzucał czterema kostkami, Bogdan rzucał sześcioma kostkami. Adam przyznawał sobie punkt za każdym razem, kiedy w rzucie kostkami wypadły dwie lub więcej szóstek. Bogdan przyznawał sobie dwa punkty, kiedy w rzucie kostkami wypadły trzy lub więcej szóstek. Umówili się, że każdy codziennie wykonywać będzie taką samą liczbę rzutów. Oprócz tego, na początku każdego dnia Bogdan dodatkowo przyznawał sobie jeden punkt, bo... był starszy. Grę rozpoczęli 1 stycznia 2018 roku l zorientowali się 10 grudnia po wykonaniu 8 rzutów, że osiągnęli taką samą liczbę punktów. Ile razy rzucali codziennie kostką, jeżeli kostki i rzuty spełniały wszystkie zasady rachunku prawdopodobieństwa?

Rozwiązanie

Prawdopodobieństwo uzyskania punktu przez Adama obliczamy ze schematu Bernoulliego. Mianowicie, obliczamy prawdopodobieństwo, że przy rzucie 4 kostkami dostaniemy zero szóstek lub jedną szóstkę i otrzymany wynik odejmujemy od 1,

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4-4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6}=\frac{171}{1296}\approx 0{,}132.$$

Prawdopodobieństwo uzyskania dwóch punktów przez Bogdana obliczymy również ze schematu Bernoulliego, odejmując od 1 szansę na wyrzucenie dwóch, jednej, zero szóstek w sześciu rzutach,

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^6-6\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5\cdot\frac{1}{6}-15\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{2906}{46656}\approx 0{,}062.$$

Jak widzimy, prawdopodobieństwo zdobycia punktu przez Adama jest przeszło dwukrotnie większe niż prawdopodobieństwo zdobycia dwóch punktów przez Bogdana, zatem fakt, że Bogdan co jakiś czas przyznaje sobie dodatkowy punkt, już tak nie bulwersuje.

Od początku roku do 10 grudnia upłynęło 343 dni. Jeżeli dziennie chłopcy wykonują po n rzutów, to liczba punktów zdobytych przez Adama wynosi $(343n+8)\cdot\frac{171}{1296}$.

Liczba punktów zdobytych przez Bogdana wynosi $(343n+8)\cdot 2\cdot\frac{2906}{46656}+344$.

Z warunków zadania wynika, że:

$$(343n+8)\cdot\frac{171}{1296}=(343n+8)\cdot 2\cdot\frac{2906}{46656}+344.$$

Rozwiązując, otrzymujemy n = 136. Chłopcy codziennie wykonywali po 136 rzutów.