

Poszukiwania

Zadanie 1.

Wykorzystując wzory podane w artykule Suma sześciątów – sześciatem, podaj przykład: (a) siedmiu, (b) ośmiu liczb całkowitych dodatnich, których suma sześciątów jest sześciatem liczby całkowitej.

Odpowiedź:

$$\text{a) } 27^3 + 36^3 + 45^3 + 72^3 + 90^3 + 144^3 + 180^3 = 216^3$$

$$\text{b) } 9^3 + 12^3 + 15^3 + 24^3 + 30^3 + 180^3 + 252^3 + 432^3 = 468^3.$$

Zadanie 2.

Wykaż, że liczba $\sin 1^\circ$ jest niewymierna.

Wskazówki

- Oznacz $a_n = \cos(2n)^\circ$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$. Stosując metodę postępowania zawartą w tekście Niewymierność funkcji trygonometrycznych kąta 1° , wykaż, że liczba $\cos 2^\circ$ jest niewymierna.
- Skorzystaj z tożsamości $\cos 2^\circ = 1 - 2 \sin^2(1^\circ)$.

Zadanie 3.

Niech $\operatorname{tg} t_n = 1/n$ dla $n \in \mathbb{N}^+$ i $t_n \in (0, \pi/2)$. Udowodnij, że: $t_1 = t_2 + t_3$.

ROZWIĄZANIE

Mamy:

$$\operatorname{tg}(t_2 + t_3) = (\operatorname{tg} t_2 + \operatorname{tg} t_3) / (1 - \operatorname{tg} t_2 \cdot \operatorname{tg} t_3) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) / (1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}) = 1,$$

stąd:

$$t_2 + t_3 = \pi/4 = t_1.$$