Witold Bednarek – szkic rozwiązania

Nieprawdopodobne

Zadanie1.

Uzasadnij, że funkcja f jest okresowa i znajdź jej okres podstawowy:

$f(x) = sin\frac{1}{2}x + cos\frac{1}{3}x$ dla $x \in R$.

Odpowiedź: $T_o = 2\pi$.

Zadanie 2.

Uzasadnij, że funkcja $h(x) = sin3x + cos\sqrt{2}x$ dla $x \in R$ nie jest okresowa.

Rozwiązanie

Wynika to z twierdzenia 4 zawartego w artykule *Okresowość funkcji*.

Okresem podstawowym funkcji ciągłej $f(x) = sin3x$ jest liczba $S = \frac{2}{3}\pi$.

Okresem podstawowym funkcji ciągłej $g(x) = cos\sqrt{2}x$ jest liczba $T = \frac{2}{\sqrt{2}}\pi = \sqrt{2}\pi$.

Liczba $\frac{S}{T} = \frac{\frac{2}{3}\pi}{\sqrt{2}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ jest niewymierna. Zatem funkcja $h(x) = f(x) + g(x)$ ($x \in R$) nie jest okresowa.

Zadanie 3.

Wykaż, że jeśli funkcja $h(x) = sin(ax) * sinx$ dla $x \in R$ jest okresowa, to liczba a jest wymierna.

Rozwiązanie

Mamy tożsamość $sin(ax) * sinx = \frac{1}{2}(cos(a-1)x - cos(a+1)x)$ dla $a, x \in R$.

Zatem $h(x) = \frac{1}{2}cos(a-1)x - \frac{1}{2}cos(a+1)x$ dla $x \in R$.

Jeśli $a = 1$, to $h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos2x$ ($x \in R$) i jest to oczywiście funkcja okresowa.

Jeśli $a = -1$, to $h(x) = \frac{1}{2}cos2x - \frac{1}{2}$ ($x \in R$) i jest to również funkcja okresowa.

Załóżmy dalej, że $a \neq 1$ i $a \neq -1$. Wtedy na mocy twierdzenia 4 zawartego w artykule *Okresowość funkcji*, liczba $\frac{a-1}{a+1}$ jest wymierna. W konsekwencji liczba a jest wymierna (dlaczego?).

Zadanie 4.

Podaj przykład funkcji okresowej różnej od funkcji stałej, której okresami są liczby $\sqrt{2}+1$ i $\sqrt{2}-1$.

Rozwiązanie

Niech $A = \{k + m\sqrt{2}:\ k, m - liczby\ całkowite\}$. Przyjmujemy

$$f(x) = \begin{cases} 1\ dla\ \ x \in A, \\ 0\ dla\ \ x \in R \setminus A \end{cases}$$

Zadanie 5.

Oblicz: a) $arc\ sin\ \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $arc\ sin\ 1$; c) $arc\cos\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $arc\ cos\ 1$;

e) $arc\ tg\ 1$; f) $arc\ tg\ \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$; g) $arc\ ctg\ 1$; h) $arc\ ctg\ \left(-\sqrt{3}\right)$.

Odpowiedź: a) $\frac{\pi}{3}$; b) $\frac{\pi}{2}$; c) $\frac{\pi}{4}$; d) 0; e) $\frac{\pi}{4}$, f) $-\frac{\pi}{4}$, g) $\frac{\pi}{4}$; h) $\frac{5\pi}{6}$.

Zadanie 6.

Wykaż, że

$$arc\ tg\ \frac{1}{2} + arc\ tg\ \frac{1}{8} + arc\ tg\ \frac{1}{18} + \cdots + arc\ tg\ \frac{1}{2n^2} = arc\ tg\ \frac{n}{n+1}$$

dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Wskazówka. Zastosuj zasadę indukcji matematycznej oraz skorzystaj z twierdzenia 5 zawartego w opracowaniu *Arkusy*.

Zadanie 7.

Niech $n \geq 1$ będzie liczbą naturalną. Udowodnij, że

$$arc\cos\frac{3n^2-1}{3n^2+1} + arc\cos\frac{3n^2+6n-1}{6n^2+2} = \frac{\pi}{3}.$$

Rozwiązanie

Oznaczmy $\alpha = arc\cos\frac{3n^2-1}{3n^2+1}$ i $\beta = arc\cos\frac{3n^2+6n-1}{6n^2+2}$, gdzie $\alpha, \beta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Stąd $\cos\alpha = \frac{3n^2-1}{3n^2+1}$ i $\cos\beta = \frac{3n^2+6n-1}{6n^2+2}$.

Następnie obliczamy $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}n}{3n^2+1}$ i $\sin\beta = \frac{\sqrt{3}(3n^2-2n-1)}{6n^2+2}$.

Obliczamy:

$$cos(\alpha+\beta) = cos\alpha\ cos\beta - sin\alpha\ sin\beta = \frac{3n^2-1}{3n^2+1} * \frac{3n^2+6n-1}{6n^2+2} - \frac{2\sqrt{3}n}{3n^2+1} * \frac{\sqrt{3}(3n^2-2n-1)}{6n^2+2} =$$

$$= \frac{9n^4+6n^2+1}{2(3n^2+1)^2} = \frac{\left(3n^2+1\right)^2}{2(3n^2+1)^2} = \frac{1}{2}.$$

Skoro $\alpha + \beta \epsilon (0, \pi)$, to $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$, czyli mamy tezę.

Zadanie 8.

Rozwiąż równanie

$$arc\sin x + arc\sin\sqrt{3}x = \frac{\pi}{2}.$$

Rozwiązanie

Oznaczmy $\alpha = arc\ sinx$ i $\beta = arc\ sin\sqrt{3}x$. Zauważmy, że z podanego równania wynika, że $x > 0$. Zatem $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Mamy

$sin\alpha = x$ I $\sqrt{3}x = sin\beta.$

Z podanego równania $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

Stąd kolejno wynika, że: $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$, $sin\ \alpha = sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$, $sin\alpha = cos\beta$, $sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2\beta}$,

$x = \sqrt{1 - \left(\sqrt{3}x\right)^2}$, $x = \sqrt{1 - 3x^2}$, $x^2 = 1 - 3x^2$, $4x^2 = 1$, $x^2 = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ lub $x = -\frac{1}{2}$.

Skoro $x > 0$, to $x = \frac{1}{2}$.