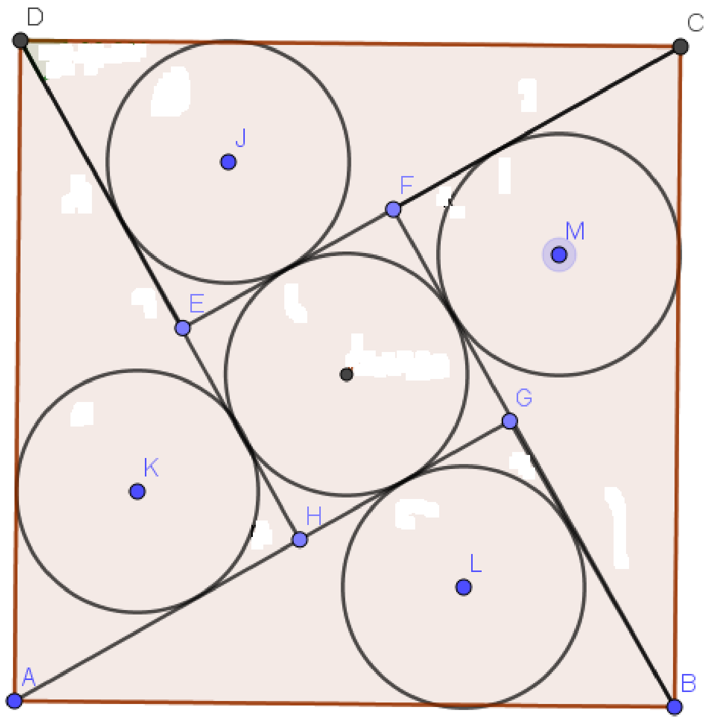
Zadania Sioguna

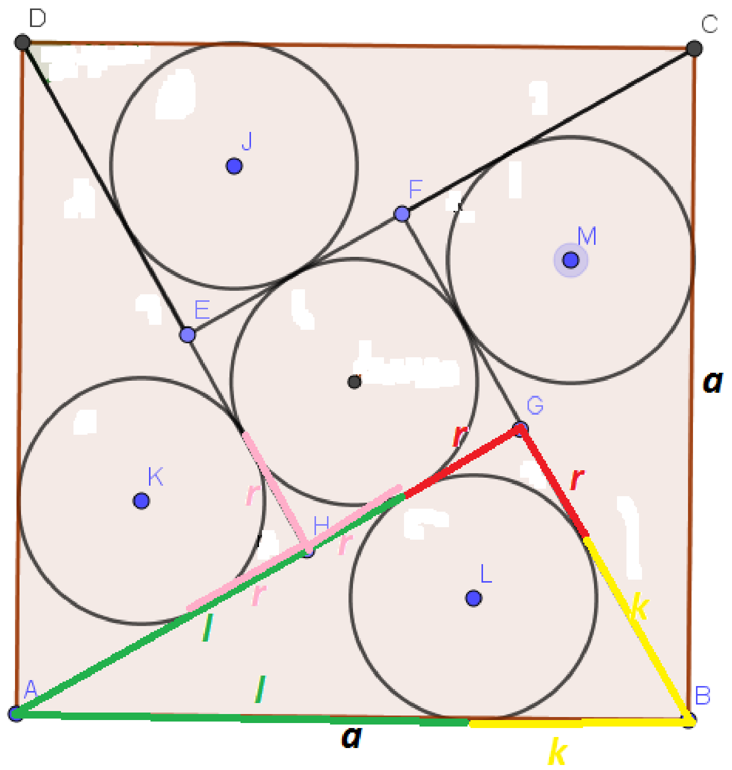
Zadanie 1.



Znajdź związek między długością boku dużego kwadratu, a promieniem jednego koła

Rozwiązanie:

Popatrzmy na poniższy rysunek



Skupmy naszą uwagę na trójkącie ABG. Jest on prostokątny.

Przeciwprostokątna |AB|=***a,*** lub $a = k + l$

Ponieważ jednak $l = 2r + k$ (można to odczytać z rysunku), więc $a = k + l = k + 2r + k = 2r + 2k$.

Krótsza przyprostokątna $|BG| = k + r = \frac{1}{2}a$

Dłuższa przyprostokątna $|AG| = l + r = 2r + k + r = k + 3r = \frac{1}{2}a + 2r$

Z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$\boldsymbol{|BG|^2 + |AG|^2 = |AB|^2}$$

$$\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + |AG|^2 = a^2}$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{4}a^2 + |AG|^2 = a^2}$$

$$\boldsymbol{|AG|^2 = \frac{3}{4}a^2}$$

$$\boldsymbol{|AG| = \frac{\sqrt{3}}{2}a}$$

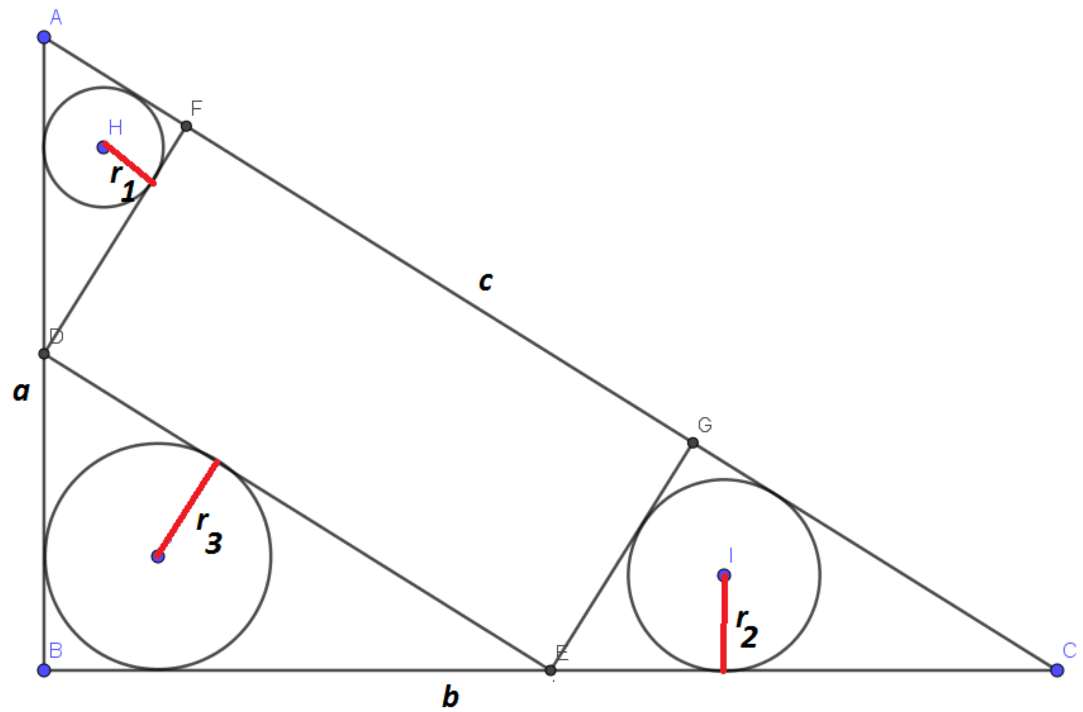
Mamy więc

$$\frac{1}{2}a + 2r = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$2r = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}a$$

$$r = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}a$$

Zadanie 2.



W trójkąt prostokątny wpisano prostokąt tak, że jego pole jest maksymalne. W powstałe trójkąty wpisano koła o promieniach odpowiednio r_1, r_2 i r_3. Udowodnij, że zachodzi: $(r_1)^2 + (r_2)^2 = (r_3)^2$.

Rozwiązanie:

Pole prostokąta DEGF wpisanego w trójkąt prostokątny ABC będzie największe gdy punkt D podzieli przyprostokątną AB na dwa przystające odcinki. Wówczas Punkt E podzieli przyprostokątną BC też na dwa przystające odcinki.

Wyznaczmy boki trójkąta AFD wiedząc, że $|AB| = a; \quad |BC| = b \quad i \quad |AC| = c$

$$|AD| = \frac{1}{2}a$$

$$\frac{|AF|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

$$\frac{|AF|}{\frac{1}{2}a} = \frac{a}{c}$$

$$|AF| = \frac{a^2}{2c}$$

$$\frac{|FD|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|AC|}$$

$$\frac{|FD|}{\frac{1}{2}a} = \frac{b}{c}$$

$$|FD| = \frac{ab}{2c}$$

Pole trójkąta ADF

$$P_{ADF}=\frac{1}{2}|AF|\cdot|FD|=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{2c}\cdot\frac{ab}{2c}=\frac{a^3b}{8c^2}$$

Obwód trójkąta AFD

$$O_{AFD}=|AF|+|FD|+|AD|=\frac{a^2}{2c}+\frac{ab}{2c}+\frac{a}{2}=\frac{a^2+ab+ac}{2c}$$

$$r_1=\frac{P_{ADF}}{\frac{1}{2}\cdot O_{ADF}}=\frac{2P_{ADF}}{O_{ADF}}=\frac{2\cdot\frac{a^3b}{8c^2}}{\frac{a^2+ab+ac}{2c}}=\frac{\frac{a^3b}{4c^2}}{\frac{a^2+ab+ac}{2c}}=\frac{2a^3bc}{4c^2(a^2+ab+ac)}=$$

$$=\frac{a^2b}{2c(a+b+c)}$$

Wyznaczmy boki trójkąta ECG wiedząc, że $|AB|=a$; $|BC|=b$ i $|AC|=c$

$$|EC|=\frac{1}{2}b$$

$$|GE|=|FD|=\frac{ab}{2c}$$

$$\frac{|GC|}{|EC|}=\frac{|BC|}{|AC|}$$

$$\frac{|GC|}{\frac{1}{2}b}=\frac{b}{c}$$

$$|GC|=\frac{b^2}{2c}$$

Pole trójkąta ECG

$$P_{ECG}=\frac{1}{2}|EG|\cdot|GC|=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{2c}\cdot\frac{ab}{2c}=\frac{ab^3}{8c^2}$$

Obwód trójkąta ECG

$$O_{ECG}=|GE|+|GC|+|EC|=\frac{b^2}{2c}+\frac{ab}{2c}+\frac{b}{2}=\frac{b^2+ab+bc}{2c}$$

$$r_2=\frac{P_{ECG}}{\frac{1}{2}\cdot O_{ECG}}=\frac{2P_{ECG}}{O_{ECG}}=\frac{2\cdot\frac{ab^3}{8c^2}}{\frac{b^2+ab+bc}{2c}}=\frac{\frac{ab^3}{4c^2}}{\frac{b^2+ab+bc}{2c}}=\frac{2ab^3c}{4c^2(b^2+ab+bc)}=$$

$$=\frac{ab^2}{2c(a+b+c)}$$

Wyznaczmy boki trójkąta DBE wiedząc, że $|AB| = a; \quad |BC| = b \quad i \quad |AC| = c$

$$|BD| = \frac{1}{2}a$$

$$|BE| = \frac{1}{2}b$$

$$|DE| = \frac{1}{2}c$$

Pole trójkąta DBE

$$P_{DBE} = \frac{1}{2}|DB| \cdot |BE| = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{ab}{8}$$

Obwód trójkąta AFD

$$O_{DBE} = |BD| + |BE| + |DE| = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = \frac{a+b+c}{2}$$

$$r_3 = \frac{P_{DBE}}{\frac{1}{2} \cdot O_{DBE}} = \frac{2P_{DBE}}{O_{DBE}} = \frac{2 \cdot \frac{ab}{8}}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{\frac{ab}{4}}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{2ab}{4(a+b+c)} = \frac{ab}{2(a+b+c)}$$

Tak więc

$$r_1 = \frac{a^2b}{2c(a+b+c)}; \quad r_2 = \frac{ab^2}{2c(a+b+c)} \quad i \quad r_3 = \frac{ab}{2(a+b+c)}$$

Dla uproszczenia zapisu przyjmijmy

$$O = a + b + c$$

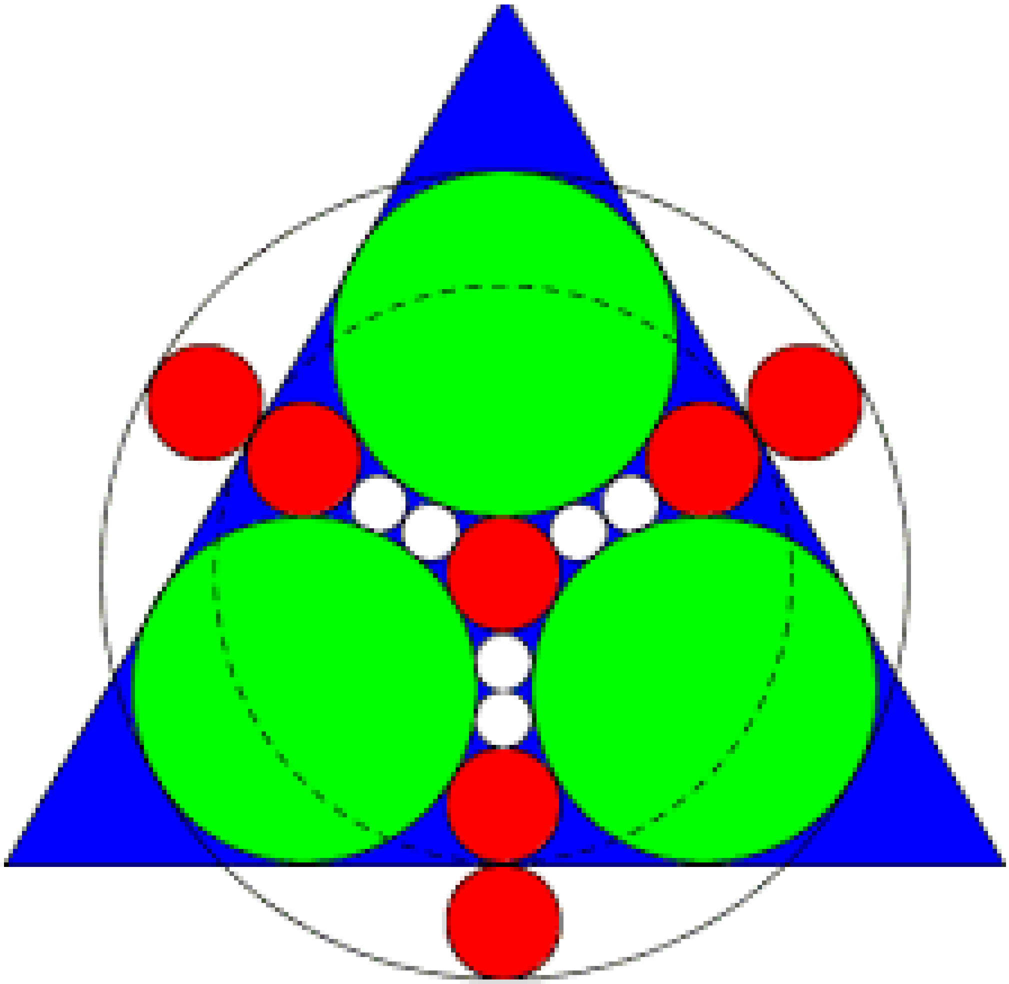
Wówczas

$$r_1 = \frac{a^2b}{2cO}; \quad r_2 = \frac{ab^2}{2cO} \quad i \quad r_3 = \frac{ab}{2O}$$

$$r_1^2 = \frac{a^4b^2}{4O^2c^2}; \quad r_2^2 = \frac{a^2b^4}{4O^2c^2} \quad i \quad r_3^2 = \frac{a^2b^2}{4O^2}$$

$$r_1^2 + r_2^2 = \frac{a^4b^2 + a^2b^4}{4O^2c^2} = \frac{a^2b^2(a^2+b^2)}{4O^2c^2} = \frac{a^2b^2c^2}{4O^2c^2} = \frac{a^2b^2}{4O^2} = r_3^2$$

Zadanie 3.



Znajdź zależność między promieniami okręgu narysowanego linią przerywaną, a promieniem białego koła.

Rozwiązanie:

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

r – promień okręgu przerywanego

R – promień największego okręgu

z – promień okręgu zielonego

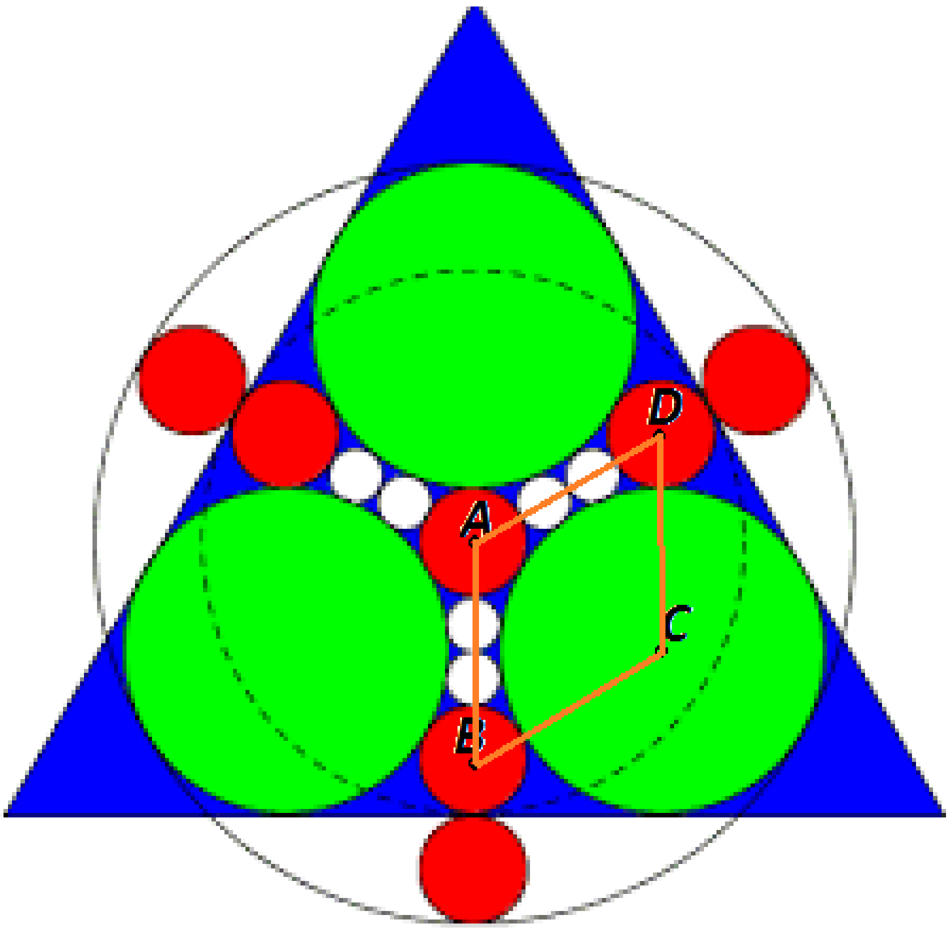
c – promień okręgu czerwonego

b – promień okręgu białego

Rozważmy następujący układ równań

$$\begin{cases} r = 3c + 4b \\ R = 5c + 4b \\ R = c + 2z \\ z + c = 2c + 4b \end{cases}$$

Ostatnie równanie można odczytać z następującego rysunku



Gdzie czworokąt ABCD jest rąbem.

Z ostatniego równania mamy:

$$z = c + 4b$$

Podstawiając do trzeciego równania otrzymujemy

$$R = c + 2c + 8b = 3c + 8b$$

Porównując teraz drugie i trzecie równanie otrzymujemy

$$5c + 4b = 3c + 8b$$

$$2c = 4b$$

$$c = 2b$$

Otrzymane *b* wstawiamy do pierwszego równania i mamy

$$r = 3c + 4b = 6b + 4b = 10b$$

Promień okręgu przerywanego jest 10 razy większy od promienia okręgu białego.