Jacek Kredenc – szkic rozwiązania

Porównywanie

Zadanie 1

Dane są dwie liczby: $a = 31^{11}$ i $b = 17^{14}$. Porównaj te liczby.

Rozwiązanie:

Oszacujmy ułamek $\frac{b}{a}$.

$$\frac{b}{a} = \frac{17^{14}}{31^{11}} = \frac{17^{11} \cdot 17^3}{31^{11}} > \frac{17^{11} \cdot 17^3}{34^{11}} = \frac{17^3}{2^{11}} = \frac{17^3}{2^8 \cdot 2^3} = \frac{17^3}{(2^4)^2 \cdot 2^3} = \frac{17^3}{16^2 \cdot 2^3} > \frac{17^2 \cdot 17}{17^2 \cdot 2^3} =$$

$$= \frac{17}{2^3} = \frac{17}{8} > 1$$

$$\frac{b}{a} > 1$$

Wynika z tego, że

$$a < b$$

Zadanie 2

Dane są dwie liczby: $a = \sqrt[2019]{2019!}$ i $b = \sqrt[2020]{2020!}$. Porównaj te liczby.

Rozwiązanie:

Prawdziwe są następujące nierówności

$$2019! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2017 \cdot 2018 \cdot 2019 < \underbrace{2019 \cdot 2019 \cdot 2019 \cdot \dots \cdot 2019 \cdot 2019 \cdot 2019}_{2019\, razy} =$$

$$= 2019^{2019} < 2020^{2019}$$

Czyli mamy

$$2019! < 2020^{2019} \qquad /\cdot (2019!)^{2019}$$

$$(2019!)^{2019} \cdot 2019! < (2019!)^{2019} \cdot 2020^{2019}$$

$$(2019!)^{2020} < (2020!)^{2019}$$

Nanieśmy na obie strony pierwiastek

$$\sqrt[4078380]{(2019!)^{2020}} < \sqrt[4078380]{(2020!)^{2019}}$$

$$\sqrt[2019]{2019!} < \sqrt[2020]{2020!}$$

Tak więc

$$a < b$$

Zadanie 3

Dane są dwie liczby: $a = 12^{46}$ i $b = 5^{69}$. Porównaj te liczby.

Rozwiązanie:

$$a = 12^{46} = 12^{2\cdot 23} = (12^2)^{23} = 144^{23} > 125^{23} = (5^3)^{23} = 5^{3\cdot 23} = 5^{69} = b$$

$$a > b$$