Witold Bednarek – szkic rozwiązania

Nierówne logarytmy

Zadanie 1

Liczby a, b, c większe od 1 tworzą rosnący ciąg arytmetyczny. Wykaż, że

$$\log_a b + \log_b a > \log_b c + \log_c b.$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy $s = \log_b a$ i $t = \log_b c$. Oczywiście $0 < s < t$. Mamy udowodnić, że:

$$\frac{1}{s} + s > t + \frac{1}{t}.$$

Po przekształceniach otrzymujemy nierówność:

$$\frac{t-s}{st} \cdot (1 - st) > 0.$$

Wystarczy pokazać, że $st < 1$ (dlaczego?). Mamy:

$$st < \left(\frac{s+t}{2}\right)^2 = \left(\frac{\log_b a + \log_b c}{2}\right)^2 = \left(\frac{\log_b ac}{2}\right)^2 = \left(\log_b \sqrt{ac}\right)^2 < \log_b \frac{a+c}{2} = \log_b b = 1.$$

Zadanie 2

Niech $b > a > 1$ i $m > 0$. Wykaż, że:

$$\log_a b > \log_{(a+m)}(b+m).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy $u = \log_a b$ i $w = \log_{(a+m)}(b+m)$. Stąd:

$$a^u = b \text{ i } (a+m)^w = b+m.$$

W konsekwencji:

(*) $$(a+m)^w = a^u + m.$$

Ponieważ $w > 1$ (dlaczego?), to $(a+m)^w > a^w + m$ (dlaczego?).

Stąd i z (*) otrzymujemy, że:

$$a^w + m < a^u + m,$$

czyli

$$a^w < a^u,$$

skąd

$$w < u \quad \text{(bo } a > 1\text{)},$$

a to mieliśmy udowodnić.

Zadanie 3

Wykaż, że jeśli $a_1, a_2, \ldots, a_n, b > 0$, to:

$$\log_{a_1} b + \log_{a_2} b + \ldots + \log_{a_n} b \geqslant n^2 \cdot \log_{(a_1 a_2 \ldots a_n)} b.$$

Rozwiązanie:

Mamy nierówność między średnią arytmetyczną a harmoniczną dla liczb dodatnich $c_1, c_2, \ldots, c_n$:

$$\frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}{n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \ldots + \frac{1}{c_n}},$$

czyli:

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n \geqslant \frac{n^2}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \ldots + \frac{1}{c_n}}.$$

Połóżmy $c_i = \log_{a_i} b$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Wtedy otrzymujemy:

$$\log_{a_1} b + \log_{a_2} b + \ldots \log_{a_n} b \geqslant \frac{n^2}{\frac{1}{\log_{a_1} b} + \frac{1}{\log_{a_2} b} + \ldots + \frac{1}{\log_{a_n} b}} = \frac{n^2}{\log_b a_1 + \log_b a_2 + \ldots + \log_b a_n} =$$

$$= \frac{n^2}{\log_b (a_1 a_2 \ldots a_n)} = n^2 \cdot \log_{(a_1 a_2 \ldots a_n)} b.$$