Bartłomiej Pawlik – szkic rozwiązania

Trudne poszukiwania

Zadanie 1.
Ile jest liczb naturalnych n takich, że $\sqrt[3]{n}$ różni się od liczby $\sqrt{5}$ o co najwyżej 1?

Rozwiązanie.
Szukamy naturalnych rozwiązań nierówności

$$\left|\sqrt[3]{n}-\sqrt{5}\right| \leqslant 1.$$

Zatem, po obliczeniu,

$$n \geqslant -16+8\sqrt{5} \qquad \text{oraz} \qquad n \leqslant 16+8\sqrt{5}.$$

Z faktów

$$8\sqrt{5}=\sqrt{320} \qquad \text{oraz } \sqrt{289}<\sqrt{320}<\sqrt{324}$$

wynika, że częścią całkowitą liczby $8\sqrt{5}$ jest 17.
Zatem szukamy liczb naturalnych spełniających nierówności

$$n \geqslant 2 \qquad \text{oraz} \qquad n \leqslant 33.$$

Tych liczb jest dokładnie 32.

Zadanie 2.
Ile jest liczb całkowitych dodatnich n takich, że ułamek $\frac{n}{100}$ jest właściwy i nieskracalny?

Rozwiązanie.
Jedynymi dzielnikami pierwszymi liczby 100 są 2 i 5.
Zatem szukamy liczb n ze zbioru $A=\{1,2,\ldots,100\}$, które nie są podzielne przez 2 ani przez 5. W A znajduje się 50 liczb podzielnych przez 2, 20 liczb podzielnych przez 5, oraz 10 liczb podzielnych przez 10. Zatem szukana liczba to

$$100-(50+20-10)=40.$$

Zadanie 3.
Niech $\overline{xy}$ oznacza zapis liczby trzycyfrowej w postaci dziesiętnej (x - cyfra dziesiątek, y - cyfra jedności). Ile wynosi najmniejsza wspólna wielokrotność wszystkich liczb dwucyfrowych postaci $\overline{aa}$?

Rozwiązanie.
Dane liczby mają postać $11\cdot a$, gdzie $a\in\{1,2,\ldots,9\}$. Zatem każda z nich jest podzielna przez 11 a zarazem niepodzielna przez 11^2. Wynika stąd, że

$$\mathrm{NWW}(11,22,\ldots,99)=11\cdot\mathrm{NWW}(1,2,\ldots,9).$$

Ponadto

$$\mathrm{NWW}(1,2,3,4,5,6,7,8,9)=\mathrm{NWW}(1,2,3,2^2,5,2\cdot3,7,2^3,3^2)=2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7=2520.$$

Ostatecznie

$$\mathrm{NWW}(11,22,33,44,55,66,77,88,99)=11\cdot2520=27720.$$