Problem Czebyszewa

Niech $f\colon R \longrightarrow R^{+}$ będzie funkcją rosnącą. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots\ a_n$ zachodzi nierówność:

$$(f(a_1))^{a_1} \cdot (f(a_2))^{a_2} \cdot \ldots \cdot (f(a_n))^{a_n} \geqslant (f(a_1) \cdot f(a_2) \cdot \ldots \cdot f(a_n))^{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}}.$$

Rozwiązanie:

Załóżmy bez zmniejszenia ogólności rozważań, że $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Skoro funkcja f jest rosnąca, to $f(a_1) \leqslant f(a_2) \leqslant \ldots \leqslant f(a_n)$. Stąd wobec $f(x) > 0$ dla $x \in R$ mamy $\log f(a_1) \leqslant \log f(a_2) \leqslant \ldots \leqslant \log f(a_n)$. Stosując nierówność (*) w artykule „Nierówności Czebyszewa" mamy

$$n \sum_{k=1}^{n} a_k \log f(a_k) \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \log f(a_k)\right).$$

Korzystając z własności logarytmu kolejno otrzymujemy:

$$n \sum_{k=1}^{n} \log (f(a_k))^{a_k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \left(\log \prod_{k=1}^{n} f(a_k)\right) \quad | : n$$

$$\sum_{k=1}^{n} \log (f(a_k))^{a_k} \geqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} \cdot \left(\log \prod_{k=1}^{n} f(a_k)\right),$$

$$\log \prod_{k=1}^{n} (f(a_k))^{a_k} \geqslant \log \left(\prod_{k=1}^{n} f(a_k)\right)^{\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}},$$

$$\prod_{k=1}^{n} (f(a_k))^{a_k} \geqslant \left(\prod_{k=1}^{n} f(a_k)\right)^{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}}$$

(*) $\quad n\,(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ \ldots + a_n b_n) \geqslant (a_1 + a_2 + \ \ldots + a_n) \cdot (b_1 + b_2 + \ \ldots + b_n)$