Witold Bednarek – szkic rozwiązania

Sprzymierzeniec „U”

Niech $(1+x)^{4n} = \sum_{k=0}^{4n} a_k x^k$ dla $x \in R$. Wyznacz sumy:

$S_0 = a_0 + a_4 + a_8 + ... + a_{4n}$

$S_1 = a_1 + a_5 + a_9 + ... + a_{4n-3}$,

$S_2 = a_2 + a_6 + a_{10} + ... + a_{4n-2}$,

$S_3 = a_3 + a_7 + a_{11} + ... + a_{4n-1}$.

Rozwiązanie:

Podstawiamy do podanej równości $x = i$. Wtedy

$$(1+i)^{4n} = S_0 + S_1 i - S_2 - S_3 i \quad , \text{ bo } i^2 = -1,$$

a więc $[(1+i)^4]^n = (S_0 - S_2) + (S_1 - S_3)i$, czyli

$$(-4)^n = (S_0 - S_2) + (S_1 - S_3)i$$

Porównując części rzeczywiste i urojone mamy

$$S_0 - S_2 = (-4)^n \quad i \quad S_1 - S_3 = 0.$$

Podstawiamy jeszcze do podanej równości $x = 1$ oraz $x = -1$ otrzymując

$$2^{4n} = S_0 + S_1 + S_2 + S_3 \quad \text{oraz} \quad 0^{4n} = S_0 - S_1 + S_2 - S_3$$

Z ostatnich czterech równości wyznaczamy

$$S_0 = 2^{4n-2} - 2(-4)^{n-1},$$

$$S_1 = S_3 = 2^{4n-2},$$

$$S_2 = 2^{4n-2} + 2(-4)^{n-1}.$$