

## Co jest większe

### Zadanie 1

Dane są dwie liczby:  $a = \frac{\overbrace{1999\dots9991}^{2018}}{\underbrace{1999\dots9997}_{2019}}$  i  $b = \frac{\overbrace{1999\dots9993}^{2019}}{\underbrace{1999\dots9998}_{2020}}$ . Porównaj liczby  $a$  i  $b$

### Rozwiązanie

Wprowadźmy oznaczenie

$$x = \underbrace{2\,000\dots000}_{2019}$$

Wówczas

$$a = \frac{\overbrace{1\,999\dots999\,1}^{2018}}{\underbrace{1\,999\dots999\,7}_{2019}} = \frac{\overbrace{2\,000\dots000}^{2019} - 9}{\underbrace{2\,000\dots000}_{2020} - 3} = \frac{x - 9}{10x - 3}$$

I

$$b = \frac{\overbrace{1\,999\dots999\,3}^{2019}}{\underbrace{1\,999\dots999\,8}_{2020}} = \frac{\overbrace{2\,000\dots000}^{2020} - 7}{\underbrace{2\,000\dots000}_{2021} - 2} = \frac{10x - 7}{100x - 2}$$

$$\begin{aligned} a - b &= \frac{x - 9}{10x - 3} - \frac{10x - 7}{100x - 2} = \frac{x - 9}{10x - 3} \cdot \frac{100x - 2}{100x - 2} - \frac{10x - 7}{100x - 2} \cdot \frac{10x - 3}{10x - 3} = \\ &= \frac{100x^2 - 2x - 900x + 18}{1000x^2 - 20x - 300x + 6} - \frac{100x^2 - 30x - 70x + 21}{1000x^2 - 20x - 300x + 6} = \\ &= \frac{100x^2 - 902x + 18}{1000x^2 - 320x + 6} - \frac{100x^2 - 100x + 21}{1000x^2 - 320x + 6} = \frac{802x - 3}{1000x^2 - 320x + 6} > 0 \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa oczywiście dla zadanego na początku  $x$ .

Wynika z tego, że

$$a > b$$

## Zadanie 2.

Dane są liczby:  $a = \frac{3^{2016} + 3^{2017} + 3^{2018} + 3^{2019} + 3^{2020} + 3^{2021} + 3^{2022} + 2019}{3^{2015} + 3^{2016} + 3^{2017} + 3^{2018} + 3^{2019} + 3^{2020} + 3^{2021} + 2019}$

i  $b = \frac{3^{2015} + 3^{2016} + 3^{2017} + 3^{2018} + 3^{2019} + 3^{2020} + 3^{2021} + 2019}{3^{2014} + 3^{2015} + 3^{2016} + 3^{2017} + 3^{2018} + 3^{2019} + 3^{2020} + 2019}$ . Która z nich jest większa?

## Rozwiązanie

Na początek zauważmy, że obie liczby są ułamiakami niewłaściwymi.

$$\begin{aligned} a &= \frac{3^{2016} + 3^{2017} + 3^{2018} + 3^{2019} + 3^{2020} + 3^{2021} + 3^{2022} + 2019}{3^{2015} + 3^{2016} + 3^{2017} + 3^{2018} + 3^{2019} + 3^{2020} + 3^{2021} + 2019} > \\ &> \frac{3^{2016} + 3^{2017} + 3^{2018} + 3^{2019} + 3^{2020} + 3^{2021} + 3^{2022} + 2019 + 2 \cdot 2019}{3^{2015} + 3^{2016} + 3^{2017} + 3^{2018} + 3^{2019} + 3^{2020} + 3^{2021} + 2019 + 2 \cdot 2019} = \\ &= \frac{3^{2016} + 3^{2017} + 3^{2018} + 3^{2019} + 3^{2020} + 3^{2021} + 3^{2022} + 3 \cdot 2019}{3^{2015} + 3^{2016} + 3^{2017} + 3^{2018} + 3^{2019} + 3^{2020} + 3^{2021} + 3 \cdot 2019} = \\ &= \frac{3^{2015} + 3^{2016} + 3^{2017} + 3^{2018} + 3^{2019} + 3^{2020} + 3^{2021} + 2019}{3^{2014} + 3^{2015} + 3^{2016} + 3^{2017} + 3^{2018} + 3^{2019} + 3^{2020} + 2019} = b \end{aligned}$$

Nierówność wynika z monotonii ułamków

Mamy więc

$$a > b$$

## Zadanie 3

W zadaniu trzecim wkradł się błąd drukarski. Jego konsekwencją jest, że bez rachunków widać, że  $a$  jest znacznie większe od  $b$

## Zadanie 4

Dane są dwie liczby:  $a = \frac{3333333331}{6666666668}$  i  $b = \frac{4444444441}{8888888887}$ . Porównaj liczby  $a$  i  $b$

## Rozwiązanie

Zastosujmy podstawienie

$$x = 1111111111$$

Wówczas

$$a = \frac{3333333331}{6666666668} = \frac{3333333333 - 2}{6666666666 + 2} = \frac{3 \cdot 1111111111 - 2}{6 \cdot 1111111111 + 2} = \frac{3x - 2}{6x + 2}$$

i

$$b = \frac{44444444441}{8888888887} = \frac{44444444444 - 3}{8888888888 - 1} = \frac{4 \cdot 11111111111 - 3}{8 \cdot 11111111111 - 1} = \frac{4x - 3}{8x - 1}$$

W takim razie

$$\begin{aligned} a - b &= \frac{3x - 2}{6x + 2} - \frac{4x - 3}{8x - 1} = \frac{3x - 2}{6x + 2} \cdot \frac{8x - 1}{8x - 1} - \frac{4x - 3}{8x - 1} \cdot \frac{6x + 2}{6x + 2} = \\ &= \frac{24x^2 - 3x - 16x + 2}{48x^2 - 6x + 16x - 2} - \frac{24x^2 + 8x - 18x - 6}{48x^2 - 6x + 16x - 2} = \frac{24x^2 - 19x + 2}{48x^2 + 10x - 2} - \frac{24x^2 - 10x - 6}{48x^2 + 10x - 2} = \\ &= \frac{-9x + 8}{48x^2 + 10x - 2} < 0 \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa z uwagi na  $x$  i wynika z niej, że  $a < b$