Witold Bednarek – szkic rozwiązania

Geomat

Zadanie 1.

Korzystając ze wzoru $d = \dfrac{\sqrt{a^2 + 2ab \cdot \cos\alpha + b^2}}{\sin\alpha}$ z tekstu *Punkt wewnątrz kąta* wykaż, że $d \geqslant \dfrac{\sqrt{ab}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

Rozwiązanie

$$d^2 - \left(\frac{\sqrt{ab}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = \frac{a^2 + 2ab\cos\alpha + b^2}{\sin^2\alpha} - \frac{ab}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{a^2 + 2ab\cos\alpha + b^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{ab}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}} \cdot \left[(a^2 + 2ab\cos\alpha + b^2) - 4ab\cos^2\frac{\alpha}{2}\right] = \frac{1}{\sin^2\alpha}\left[a^2 + b^2 + 2ab\left(\cos\alpha - 2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sin^2\alpha}\left[a^2 + b^2 + 2ab\left(\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right) - 2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\right] = \frac{1}{\sin^2\alpha}(a^2 + b^2 - 2ab) = \frac{1}{\sin^2\alpha}(a-b)^2 \geqslant 0$$

Zadanie 2.

Kąty α, β, γ trójkąta tworzą ciąg arytmetyczny i jego boki *a, b, c* tworzą również ciąg arytmetyczny. Wykaż, że ten trójkąt jest równoboczny.

Rozwiązanie

Na podstawie równości zawartej w artykule *Jedyny taki trójkąt* mamy $b^2 = a^2 + c^2 - ac$

Zgodnie z założeniem $b = \frac{a+c}{2}$. Wynika stąd, że

$\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = a^2 + c^2 - ac$, $\quad \frac{a^2 + 2ac + c^2}{4} = a^2 + c^2 - ac \,|\cdot 4$, $\quad a^2 + 2ac + c^2 = 4a^2 + 4c^2 - 4ac$

$3a^2 + 3c^2 - 6ac = 0 \,|: 3$, $\quad a^2 + c^2 - 2ac = 0$, $\quad (a-c)^2 = 0$, $\quad a = c$.

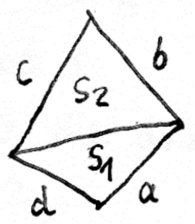
Następnie z równości $b = \frac{a+c}{2}$ mamy $b = \frac{c+c}{2} = c$. Ostatecznie $a = b = c$.

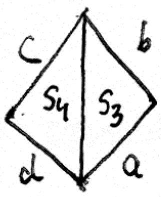
Zadanie 3.

Niech a, b, c, d będą długościami kolejnych boków czworokątów o polu S. Wykaż, że pole

$$S \leqslant \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}.$$

Rozwiązanie





$S_1 \leqslant \frac{ad}{2}$, $S_2 \leqslant \frac{bc}{2}$, $S_3 \leqslant \frac{ab}{2}$, $S_4 \leqslant \frac{cd}{2}$. Stąd

$$2S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \leqslant \frac{ad+bc+ab+cd}{2} = \frac{(a+c)(b+d)}{2}.$$

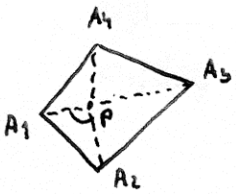
Zatem

$$S \leqslant \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}.$$

Zadanie 4.

Dany jest czworokąt wypukły $A_1A_2A_3A_4$, którego każdy bok ma długość nie większą od 2. Wykaż, że dla każdego punktu P leżącego wewnątrz tego czworokąta istnieje taki wierzchołek A_i ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$), że $|PA_i| \leqslant \sqrt{2}$.

Rozwiązanie



Niech np. $\sphericalangle A_1PA_2 \geqslant 90^\circ$. Wtedy $|A_1A_2|^2 \geqslant |PA_1|^2 + |PA_2|^2$.
Wiemy, że $|A_1A_2| \leqslant 2$. Zatem $|PA_1|^2 + |PA_2|^2 \leqslant 4$.
Stąd $|PA_1|^2 \leqslant 2$ lub $|PA_2|^2 \leqslant 2$, czyli

$$|PA_1| \leqslant \sqrt{2} \quad \text{lub} \quad |PA_2| \leqslant \sqrt{2},$$

a to mieliśmy udowodnić.