Stanisław Bajor – szkic rozwiązania

Prosta logika

Zad1. Na pytanie, który z trzech studentów studiował matematykę otrzymano następującą (prawdziwą) odpowiedź: Jeśli studiował Marek, to studiował też Wacek i nieprawda jest, że jeśli studiował Tomek, to studiował Wacek. Który z chłopców studiował matematykę?

Rozwiązanie:

Wprowadźmy oznaczenia zdań:

p- Marek studiował matematykę
q - Wacek studiował matematykę
r- Tomek studiował matematykę

Utwórzmy zdanie logiczne złożone: $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg (r \Rightarrow q))$, które jest koniunkcją zdań $(p \Rightarrow q)$ oraz $\neg (r \Rightarrow q)$. Z założenia powyższe zdanie złożone jest prawdziwe, co możemy symbolicznie zapisać :

$W [(p \Rightarrow q) \wedge (\neg (r \Rightarrow q))] = 1$ (wartość logiczna zdania jest równa 1).

Jak wiadomo z logiki matematycznej, koniunkcja dwóch zdań logicznych jest prawdziwa, jeżeli oba zdania są prawdziwe (mają wartość logiczną równą 1).

Zatem

a) $w [(p \Rightarrow q)] = 1$ oraz b) $w[\neg (r \Rightarrow q)] = 1$

z b) wynika, że $w[r \Rightarrow q] = 0$, a z własności implikacji wiemy, że implikacja dwóch zdań fałszywa tylko wtedy, gdy z prawdy wynika fałsz, wobec tego wartości logiczne zdań p i q są odpowiednio: $w(r) = 1 \wedge w(q) = 0$. Podstawiając do zdania prawdziwego $p \Rightarrow q$ w miejsce q wartość logiczną 0, otrzymujemy, że $w(p) = 0$ (zdanie fałszywe).
Zestawiając wyniki (wartości zdań logicznych: $w(p) = 0$, $w(q) = 0$, $w(r) = 1$) otrzymujemy odpowiedź: Matematykę studiował Tomek.

Zad: 2. Prawdziwe jest zdanie: Nieprawda ,że jeśli Platon założył Akademię, to jeśli Arystoteles był uczniem Platona, to Arystoteles nie uczęszczał do Akademii. Czy na podstawie tej informacji można udzielić odpowiedzi na poniższe pytania(jeśli tak, to podaj te odpowiedzi):
a)Czy Platon założył Akademię?
b) Czy Arystoteles był uczniem Platona?
c) Czy Arystoteles uczęszczał do Akademii?

Rozwiązanie:

Wprowadźmy oznaczenia zdań:
p - Platon założył Akademię
q - Arystoteles był uczniem Platona
r - Arystoteles uczęszczał do Akademii

Ułóżmy zdanie logiczne złożone podane w treści używając powyższych oznaczeń. Nasze zdanie, to: $\neg[p \Rightarrow (q \Rightarrow \neg r)]$. Z warunku zadania wiemy, że zdanie jest prawdziwe, zatem $w([p \Rightarrow (q \Rightarrow \neg r)]) = 0$ (ponieważ zaprzeczenie zdania nieprawdziwego jest zdaniem prawdziwym).
Zdanie $p \Rightarrow (q \Rightarrow \neg r)$ ma postać implikacji o poprzedniku p i następniku $q \Rightarrow \neg r$. Z lekcji logiki matematycznej wiemy, że implikacja dwóch zdań logicznych jest zdaniem fałszywym tylko wtedy, gdy jej poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy. Zatem mamy, że $w(p) = 1$, a $w(q \Rightarrow \neg r) = 0$.
Dalej z $w(q \Rightarrow \neg r) = 0$ wynika, że $w(q) = 1$ i $w(\neg r) = 0$, a zatem $w(r) = 1$.
Zatem odpowiedź na wszystkie trzy pytania brzmi: TAK.

Zad. 3. Znajdź wszystkie pary (a, b) liczb całkowitych dodatnich, jeśli wiadomo, ze wśród poniższych zdań trzy są prawdziwe i jedno fałszywe:

a) a + 1 dzieli się przez b;
b) a = 2b + 5;
c) a + b dzieli się przez 3;
d) a + 7b jest liczbą pierwszą.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że nie mogą być jednocześnie prawdziwe zdania c) i d).
Wtedy bowiem liczba a+7b = (a + b) + 6b byłaby podzielna przez 3, więc nie byłaby liczbą pierwszą.
Dalej zauważmy, że nie mogą być jednocześnie prawdziwe zdania b) i c), bo wtedy dodając obustronnie b do równości b) otrzymamy liczbę a + b = 3b + 5. Ale prawa strona nie jest podzielna przez 3, co przeczy zdaniu c).
Zatem prawdziwe są jednocześnie zdania a), b) i d).
Zdanie a) można zapisać w postaci równoważnej: $a + 1 = k \cdot b$ i k jest pewną liczbą całkowitą. Z a) i b) wynika, że $2b + 6 = k \cdot b$. Odejmując obustronnie $2 \cdot b$ od obu stron równości, otrzymujemy:
$b \cdot (k - 2) = 6$.

Przedstawmy ostatnią równość w postaci $b = \frac{6}{k-2}$ i $k \neq 2$ i $b > 0$ i $a > 0$.
Wobec tego $b \in \{1, 2, 3, 6\}$ oraz odpowiednio dla a = 2b + 5 otrzymujemy $a \in \{7, 9, 11, 17\}$.
Mając na uwadze zdanie d), że liczba a + 7b jest liczbą pierwszą i większa od 2, więc jest nieparzysta – otrzymujemy, że warunek ten spełniają dwie pary liczb: a = 9, b = 2 oraz a = 17 i b = 6.

Zad. 4. Mieszkańcy miasta A mówią tylko prawdę, mieszkańcy miasta B – tylko kłamią, a mieszkańcy miasta C – na przemian – mówią prawdę i kłamią. Dyżurny straży pożarnej odebrał telefon: „U nas jest pożar, przyjeżdżajcie szybko!”. Gdzie?” – spytał. „W mieście C” – usłyszał. Do którego z miast wyjechał wóz straży pożarnej gasić pożar?

Rozwiązanie:
Wóz straży pożarnej pojechał do miasta A.
Telefon nie mógł być wykonany z miasta A ani z C. Został wykonany z miasta B.