Operacje na funkcjach

Zadanie 1. Czy: suma, różnica, iloczyn czy iloraz funkcji f i g nieciągłych w punkcie x_0, może być funkcją ciągłą w punkcie x_0?

Rozwiązanie

a) Tak. Oto przykład: $f(x) = D(x)\ \ i\ \ \ g(x) = -D(x)$ dla np.: x_0, gdzie D jest funkcją Dirichleta. Mamy tu $f(x) + g(x) = 0\ \ \ dla\ \ \ x \in R$, a funkcja stała jest ciągła w każdym punkcie.

b) Tak. Oto przykład: $f(x) = D(x)\ \ i\ \ \ g(x) = D(x)\ \ dla\ np.{:}\ x_0 = 0$. Uzasadnienie jak powyżej.

c) Tak. Oto przykład:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \ \ 1\ \ dla\ \ x\ \ wymiernego \\ -1\ \ dla\ \ x\ \ niewymiernego \end{cases}}$$

$$\boldsymbol{g(x) = \begin{cases} -1\ \ dla\ \ x\ \ wymiernego \\ 1\ \ dla\ \ x\ \ niewymiernego \end{cases}}$$

Wtedy $f(x)g(x) = -1\ \ \ dla\ każdego\ \ \ x \in R$. Za x_0 możemy przyjąć dowolną liczbę rzeczywistą, gdzie funkcja stała jest ciągła w każdym punkcie.

d) Tak. Bierzemy pod uwagę ten sam przykład, jak powyżej.

Zadanie 2. Niech $f(x) = x^4 - x^2 - 1$ dla $x \in R$. Wykaż, że funkcja f posiada co najmniej jedno miejsce zerowe.

Rozwiązanie

Funkcja f jest ciągła. Mamy $f(0) = -1 < 0\ \ \ i\ \ \ f(2) = 11 > 0$. Zatem na mocy własności Darboux istnieje takie $c \in \langle 0; 2\rangle$, że $f(c) = 0$.

Zadanie 3. Niech $f{:}\langle a, b\rangle \longrightarrow \langle a, b\rangle$ będzie funkcją ciągłą. Wykaż, że istnieje takie $c \in \langle a,b\rangle$, że $f(c) = c$

Rozwiązanie

Niech $g(x) = f(x) - x\ \ \ dla\ \ \ x \in \langle a; b\rangle$. Funkcja g jest ciągła. Mamy

$$g(a) = f(a) - a \geq a - a = 0\ \ \ i\ \ \ g(b) = f(b) - b \leq b - b = 0$$

Zatem na mocy własności Darboux istnieje takie $c \in \langle a; b\rangle,\ \ że\ \ \ g(c) = 0,\ \ czyli\ \ \ f(c) - c = 0,\ \ f(c) = c$

Zadanie 4. Uzasadnij, że funkcja $f: R \longrightarrow R$ określona wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} x \; dla \; x \; wymiernego \\ 0 \; dla \; x \; niewymiernego \end{cases}$$

Jest w punkcie $x_0 = 0$ ciągła, lecz nieróżniczkowalna.

Rozwiązanie

Mamy oczywiście $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$. Iloraz różnicowy jest postaci

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h) - 0}{h} = \frac{f(h)}{h}$$

Jeśli h przyjmuje wartości wymierne, to

$$\frac{f(h)}{h} = \frac{h}{h} = 1 \quad \xrightarrow{h \longrightarrow 0} 1$$

Jeśli h przyjmuje wartości niewymierne, to

$$\frac{f(h)}{h} = \frac{0}{h} = 0 \quad \xrightarrow{h \longrightarrow 0} 0$$

Zatem nie istnieje granica ilorazu różnicowego w zerze.