Szkice rozwiązań, Jacek Kredenc

Styczne na wakacje

Zadanie 1. Znajdź równanie prostej będącej styczną do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ wiedząc, że punktem styczności jest punkt $A = (6; 158)$.

Rozwiązanie:

Równanie stycznej do krzywej ma postać

$$y = ax + b$$

Szukamy współczynnika kierunkowego tej prostej. W tym celu wyznaczamy $f'(6)$.

$$f'(6) = \lim_{h\to 0}\frac{f(6+h)-f(6)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(6+h)^3 - 2(6+h)^2 + 3(6+h) - 4 - 158}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{216 + 108h + 18h^2 + h^3 - 2(36 + 12h + h^2) + 18 + 3h - 162}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{72 + 111h + 18h^2 + h^3 - 72 - 24h - 2h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{87h + 16h^2 + h^3}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} 87 + 16h + h^2 = 87$$

Czyli

$$a = 87$$

Wyznaczamy współczynnik b

$$158 = 87 \cdot 6 + b$$

$$158 = 532 - b$$

$$b = 374$$

Szukane równanie ma postać

$$y = 87x + 374$$

Zadanie 2. Oblicz pochodną dla następujących funkcji

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$

b) $g(x) = \sqrt{x+5}$ dla $x > -5$

Rozwiązanie:

a) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{x-x-h}{(x+h)x}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-h}{hx(x+h)} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x^2+xh} = -\frac{1}{x^2}$$

b) $g'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h+5}-\sqrt{x+5}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h+5}-\sqrt{x+5}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h+5}+\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+h+5}+\sqrt{x+5}}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\cdot\left(\sqrt{x+h+5}+\sqrt{x+5}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h+5}+\sqrt{x+5}} = \frac{1}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x+5}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+5}}$$

Zadanie 3. Za pomocą pochodnych wyznacz przybliżoną wartość

a) $\sqrt[3]{7}$

b) $\tan 35°$

Rozwiązanie:

a) skorzystamy z faktu, że

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

Niech $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Wówczas

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt[3]{x^2+2xh+h^2}+\sqrt[3]{x^2+hx}+\sqrt[3]{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2xh+h^2}+\sqrt[3]{x^2+hx}+\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\sqrt[3]{7} \approx \sqrt[3]{8} - \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = 2 - \frac{1}{3\cdot 4} = 2 - \frac{1}{12} = \frac{23}{12}$$

b) skorzystamy z faktu, że $\tan 45 = 1$

Jeśli $f(x) = \tan x$, to $f'(x) = 1 + \tan^2 x$

$$45° = \frac{1}{4}\pi$$

$$35° \approx 0{,}610865238198$$

$\tan 35° \approx \tan 45° - (1 + \tan^2 45°)\left(\frac{1}{4}\pi - 0{,}610865238198\right) = 1 - 2 \cdot 0{,}1745329251994 = 1 -$0,3490658503989=0,6509341496011