Szkice rozwiązań, Jacek Kredenc

Odkrycie wielomianu

Zadanie 1. Znajdź wszystkie takie wielomiany W, że

$W(x+1) = W(x) + 2x + 1$ dla $x \in R$

Rozwiązanie:

Niech $P(x) = W(x) - x^2$ dla $x \in R$. Wtedy $W(x) = P(x) + x^2$ dla $x \in R$. Mamy równanie

$P(x+1) + (x+1)^2 = (P(x) + x^2) + 2x + 1$ dla $x \in R$

$P(x+1) + x^2 + 2x + 1 = P(x) + x^2 + 2x + 1$ dla $x \in R$

$P(x+1) = P(x)$ dla $x \in R$

Zatem $P(x) = c$ dla $x \in R$ (c – stała). Wobec tego $W(x) = P(x) + x^2 = c + x^2$ dla $x \in R$

Zadanie 2. Znajdź wszystkie takie wielomiany W, że:

$W(x+1) = 2W(x)$ dla $x \in R$

Rozwiązanie

Niech $W(x) = ax^n + P(x)$ dla pewnego $n \in N^+, a \in R$ i wielomian $P(x)$ jest stopnia mniejszego od n (lub jest wielomianem zerowym). Mamy równanie

$$a(x+1)^n + P(x+1) = 2ax^n + 2P(x)$$

Porównując współczynniki przy wielomianach najwyższego stopnia mamy równość $a = 2a$, skąd $a = 0$. W konsekwencji wielomian W musi być stały: $W(x) = c$, ale wtedy $c = 2c$, czyli $c = 0$. Ostatecznie stwierdzamy, że wielomian W jest zerowy.

Zadanie 3. Czy istnieje taki wielomian W, że:

$W(x^2) = x \cdot W(x) + 1$ dla $x \in R$?

Rozwiązanie

Niech m oznacza stopień wielomianu $W(x)$. Wówczas stopień wielomianu $W(x^2)$ wynosi $2m$ (dlaczego?). Stopień wielomianu $xW(x) + 1$ wynosi $m + 1$. Porównując stopień wielomianów po obu stronach podanego równania mamy równość $2m = m + 1$. Stąd $m = 1$. Zatem $W(x) = ax + b$ dla pewnych $a, b \in R$ $(a \neq 0)$. Mamy teraz równanie

$ax^2 + b = x(ax + b) + 1$ dla $x \in R$

$ax^2 + b = ax^2 + bx + 1$ dla $x \in R$

$b = bx + 1$ dla $x \in R$

Co jest sprzeczne (dlaczego?).

Odp.: Taki wielomian nie istnieje.