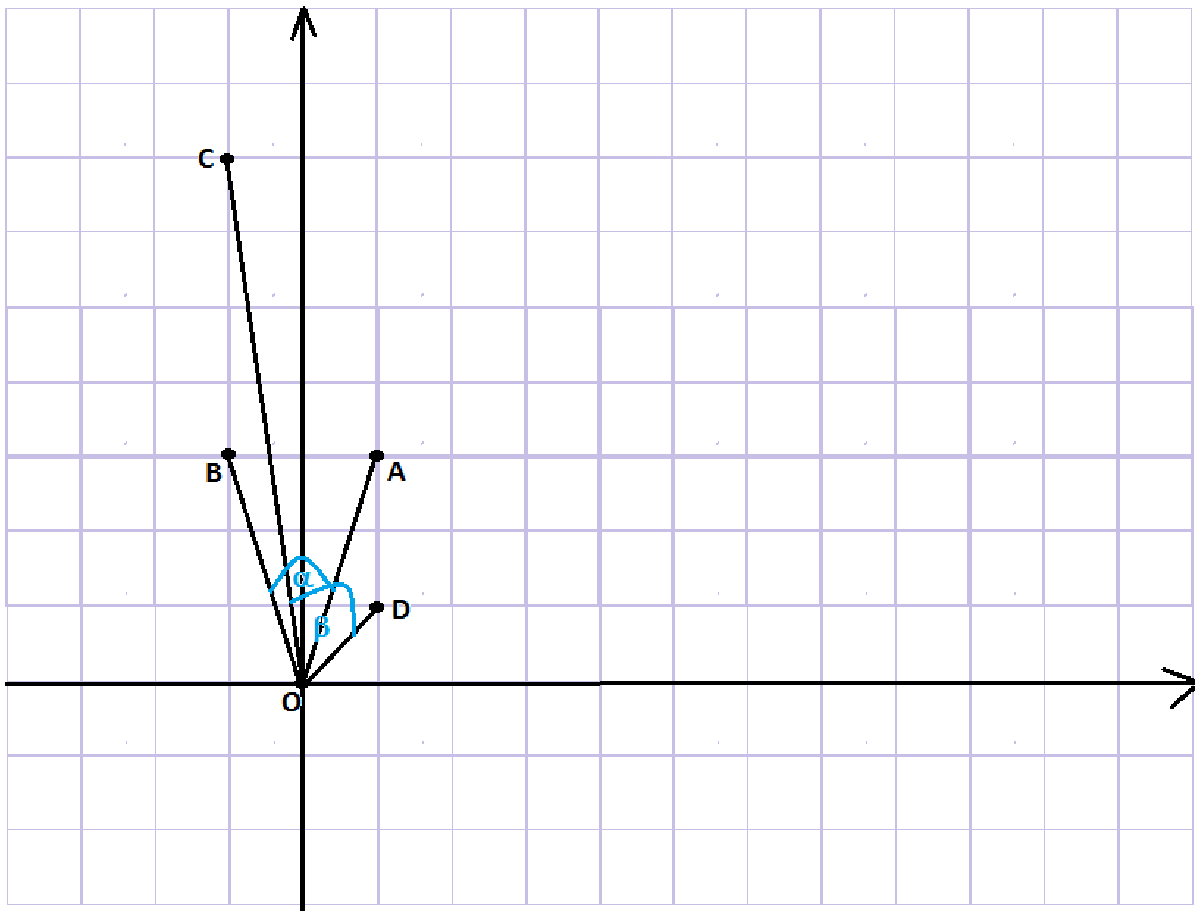
Nowa geometria

Zadanie 1. Niech punkty mają współrzędne: $A = (1;3)$; $B = (-1;3)$; $C = (-1;7)$; $D = (1;1)$; $O = (0;0)$. Wyznacz wartość sumy kątów $\measuredangle AOB + \measuredangle COD$.

Rozwiązanie:

Zacznijmy od rysunku



Na początek wyznaczmy liczbę zespoloną realizującą obrót punktu o kąt α. W tym celu rozwiążmy równanie

$$(1+3i) \cdot z_1 = -1+3i$$

$$z_1 = \frac{-1+3i}{1+3i}$$

$$z_1 = \frac{(-1+3i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}$$

$$z_1 = \frac{-1+3i+3i+9}{1-3i+3i+9}$$

$$z_1 = \frac{8+6i}{10} = \frac{4+3i}{5}$$

Teraz wyznaczmy liczbę zespoloną realizującą obrót punktu o kąt β. W tym celu rozwiążmy równanie

$$(1+i) \cdot z_2 = -1+7i$$

$$z_2 = \frac{-1+7i}{1+i}$$

$$z_2 = \frac{(-1+7i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$z_2 = \frac{-1+i+7i+7}{1-i+i+1}$$

$$z_2 = \frac{6+8i}{2} = 3+4i$$

Znajdźmy teraz iloczyn $z_1 \cdot z_2$

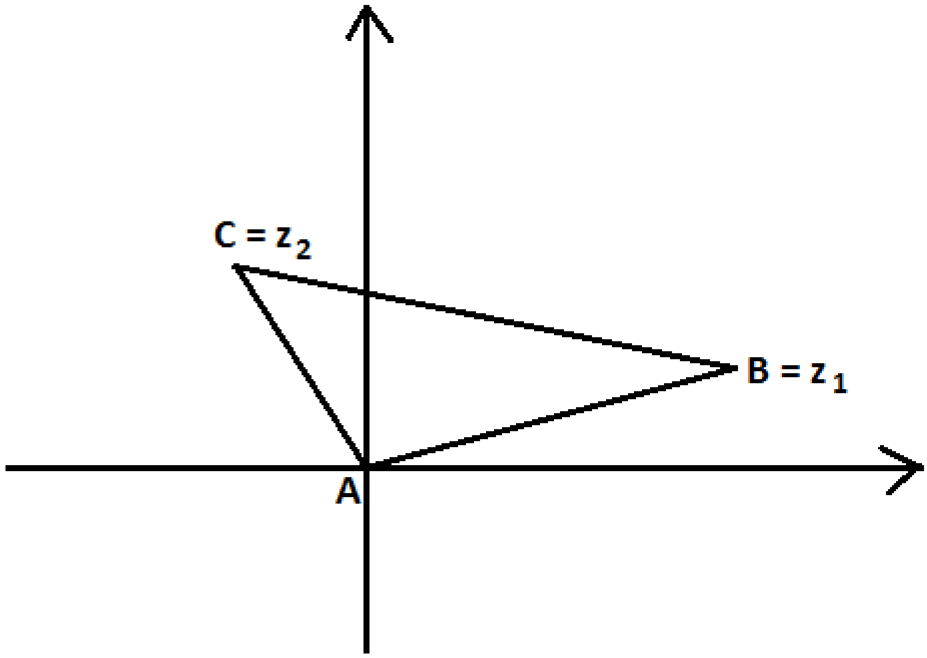
$$z_1 \cdot z_2 = \frac{4+3i}{5} \cdot (3+4i) = \frac{12+16i+9i-12}{5} = \frac{25i}{5} = 5i$$

Ponieważ iloczyn $z_1 \cdot z_2$ jest liczbą leżącą na dodatniej części osi urojonej więc szukana suma kątów wynosi $90°$

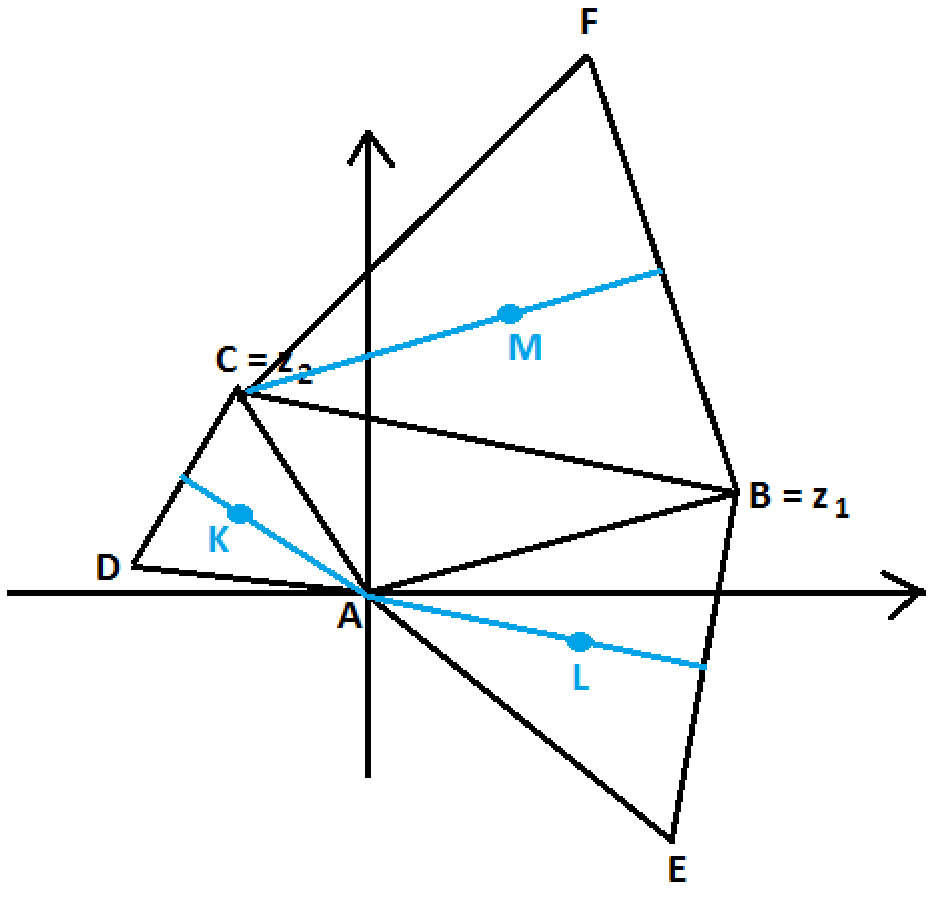
Zadanie 2. Na bokach dowolnego trójkąta zbudowano (na zewnątrz) trójkąty równoboczne. Udowodnij, że ich środki tworzą także trójkąt równoboczny.

Rozwiązanie:

Umieśćmy trójkąt w taki sposób, by wierzchołek A leżał w początku układu współrzędnych. Załóżmy dalej, że $B = z_1 \quad i \quad C = z_2$ popatrz na rysunek



Zbudujmy jeszcze na bokach tego trójkąta trójkąty równoboczne i wyznaczmy ich środki



Środek K trójkąta równobocznego ADC leży na przecięciu jego wysokości. Aby go znaleźć musimy $\overrightarrow{AC}$ obrócić o kąt $30°$, a następnie (ponieważ K dzieli wysokość w stosunku $2:1$, a $|\overrightarrow{AC}|$ jest długością boku trójkąta) otrzymany wektor trzeba pomnożyć przez $\frac{\sqrt{3}}{2}$ i przez 2 i podzielić przez 3, albo inaczej otrzymany wektor należy pomnożyć przez $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$z = \cos 30° + i \sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$K = z_2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2}z_2 + \frac{\sqrt{3}}{6}z_2 i$$

Podobnie wyznaczymy L, czyli środek trójkąta równobocznego narysowanego na boku AB. Ale tym razem obrotu dokonamy o kąt $330°$

$$z = \cos 330° + i \sin 330° = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$L = z_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2}z_1 - \frac{\sqrt{3}}{6}z_1 i$$

Pozostał jeszcze punkt M – środek trójkąta równobocznego BCF

Zauważmy, że $\overrightarrow{z_1 - z_2}$ jest równy wektorowi $\overrightarrow{CB}$ to znaczy: ma taką samą długość, kierunek i zwrot. Lecz te wektory się nie pokrywają. Dlatego też wykonanie powyższej operacji, jak przy punkcie K nie da nam jeszcze punktu M. Punkt, który otrzymamy nazwijmy więc M’

$$M' = (z_1 - z_2) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_1 i - \frac{\sqrt{3}}{2}z_2 - \frac{1}{2}z_2 i\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} =$$

$$= \frac{1}{2}z_1 + \frac{\sqrt{3}}{6}z_1 i - \frac{1}{2}z_2 - \frac{\sqrt{3}}{6}z_2 i$$

Punkt M otrzymamy dopiero przesuwając punkt M’ o wektor $\overrightarrow{AC}$ czyli dodając do otrzymanego wyniku liczbę z_2

$$M = \frac{1}{2}z_1 + \frac{\sqrt{3}}{6}z_1 i - \frac{1}{2}z_2 - \frac{\sqrt{3}}{6}z_2 i + z_2 = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 + \frac{\sqrt{3}}{6}z_1 i - \frac{\sqrt{3}}{6}z_2 i$$

Punkty K; L i M na pewno są wierzchołkami pewnego trójkąta. Aby sprawdzić, co to za trójkąt przesuńmy go tak by jeden z jego wierzchołków trafił na początek układu współrzędnych.

To nastąpi na przykład po przesunięciu wszystkich wierzchołków o wektor $\overrightarrow{KA} = -\frac{1}{2}z_2 - \frac{\sqrt{3}}{6}z_2 i$. Tak więc

$K'' = 0$

$$L'' = \frac{1}{2}z_1 - \frac{\sqrt{3}}{6}z_1 i - \frac{1}{2}z_2 - \frac{\sqrt{3}}{6}z_2 i$$

$$M'' = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 + \frac{\sqrt{3}}{6}z_1 i - \frac{\sqrt{3}}{6}z_2 i - \frac{1}{2}z_2 - \frac{\sqrt{3}}{6}z_2 i = \frac{1}{2}z_1 + \frac{\sqrt{3}}{6}z_1 i - \frac{\sqrt{3}}{3}z_2 i$$

Spróbujmy teraz obrócić wektor $\overrightarrow{K''L''}$ o $60°$

$$\left(\frac{1}{2}z_1 - \frac{\sqrt{3}}{6}z_1 i - \frac{1}{2}z_2 - \frac{\sqrt{3}}{6}z_2 i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$$

$$= \frac{1}{4}z_1 - \frac{\sqrt{3}}{12}z_1 i - \frac{1}{4}z_2 - \frac{\sqrt{3}}{12}z_2 i + \frac{\sqrt{3}}{4}z_1 i + \frac{1}{4}z_1 - \frac{\sqrt{3}}{4}z_2 i + \frac{1}{4}z_2 = \frac{1}{2}z_1 + \frac{\sqrt{3}}{6}z_1 i - \frac{\sqrt{3}}{3}z_2 i$$

$$= M''$$

Oznacza to, że trójkąt K''L''M'' jest równoboczny, co należało dowieść.