Trójkątne zadania

Zadanie 1.

Czy z odcinków o długości $\left(\frac{2}{3}\right)^{1000}$ i $\left(\frac{2}{3}\right)^{1001}$ oraz $\left(\frac{2}{3}\right)^{1002}$ można zbudować trójkąt?

Odpowiedź

Tak, gdyż

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{1002}+\left(\frac{2}{3}\right)^{1001}-\left(\frac{2}{3}\right)^{1000}=\left(\frac{2}{3}\right)^{1000}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2}+\frac{2}{3}-1\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^{1000}\left(\frac{4}{9}+\frac{2}{3}-1\right)$$
$$=\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{1000}>0$$

Zadanie 2.

Niech *a, b, c* oznaczają długości boków trójkąta. Wykaż, że:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}<\frac{5}{a+b+c}$$

Rozwiązanie

Przekształcamy równoważnie podaną nierówność

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}<\frac{5}{a+b+c}$$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)<5$$

$$\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}<5$$

$$\left(1+\frac{c}{a+b}\right)+\left(1+\frac{a}{b+c}\right)+\left(1+\frac{b}{c+a}\right)<5$$

$$3+\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}<5$$

$$\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}<2$$

Co jest prawdą na mocy zadania 2.b) z artykułu „Nierówności w trójkącie”.

Zadanie 3.

Wykaż, że w trójkącie o bokach długości *a, b, c* i wysokościach h_a, h_b, h_c oraz polu S zachodzi nierówność

$$(a+b+c)\cdot(h_a+h_b+h_c)\geq 18S$$

Rozwiązanie

Mamy $h_a=\frac{2S}{a}, h_b=\frac{2S}{b}, h_c=\frac{2S}{c}$. Zatem mamy udowodnić, że

$$(a+b+c)\cdot\left(\frac{2S}{a}+\frac{2S}{b}+\frac{2S}{c}\right)\geq 18S$$

Czyli

$$(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$$

Teraz wystarczy skorzystać z nierówności $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$

Zadanie 4.

Niech *a, b, c* będą długościami boków trójkąta, zaś α, β, γ oznaczają miary (w stopniach) kątów leżących odpowiednio naprzeciw tych boków. Wykaż, że:

$$\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c} \geq 60^\circ$$

Rozwiązanie

Załóżmy, bez zmniejszania ogólności rozważań, że $a \geq b \geq c$. Wtedy $\alpha \geq \beta \geq \gamma$.

Zatem

$$\underbrace{(a-b)}_{\geq 0}\underbrace{(\alpha-\beta)}_{\geq 0} + \underbrace{(a-c)}_{\geq 0}\underbrace{(\alpha-\gamma)}_{\geq 0} + \underbrace{(b-c)}_{\geq 0}\underbrace{(\beta-\gamma)}_{\geq 0} \geq 0$$

Przekształćmy powyższą nierówność:

$$(a\alpha - a\beta - b\alpha + b\beta) + (a\alpha - a\gamma - c\alpha + c\gamma) + (b\beta - b\gamma - c\beta + c\gamma) \geq 0$$

$$(a\alpha + b\beta) + (a\alpha + c\gamma) + (b\beta + c\gamma) \geq (a\beta + b\alpha) + (a\gamma + c\alpha) + (b\gamma + c\beta) \geq 0$$

$$2(a\alpha + b\beta + c\gamma) \geq (b+c)\alpha + (a+c)\beta + (a+b)\gamma$$

$$2(a\alpha + b\beta + c\gamma) + a\alpha + b\beta + c\gamma \geq (a+b+c)\alpha + (a+b+c)\beta + (a+b+c)\gamma$$

$$3(a\alpha + b\beta + c\gamma) \geq (a+b+c)(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$3(a\alpha + b\beta + c\gamma) \geq (a+b+c) \cdot 180^\circ$$

$$a\alpha + b\beta + c\gamma \geq (a+b+c) \cdot 600^\circ$$

$$\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c} \geq 60^\circ$$