Zadania Berna

a)Niech $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ dla $n = 1; 2; 3; \ldots$. Wykaż, że ciąg (a_n) jest malejący

b) Przedstawiamy uogólnienie nierówności Bernulliego dla *n* zmiennych nieujemnych. Wykaz, że jeśli $x_1;\ x_2;\ x_3; \ldots;\ x_n \geq 0$, to
$(1+x_1)\cdot(1+x_2)\cdot(1+x_3)\cdot\cdots\cdot(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n$

c) A teraz wzmocnienie nierówności Bernulliego dla zmiennej nieujemnej. Wykaż, że jeśli $x \geq 0$, to: $(1+x)^n \geq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}\cdot x^2$.

Rozwiązanie

a)

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{1+n}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}\cdot\frac{1}{\frac{n+2}{n+1}} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2} = \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2} =$$
$$\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2} \geq \left(1+(n+1)\cdot\frac{1}{n^2+2n}\right)\cdot\frac{n+1}{n+2} = \frac{n^2+3n+1}{n^2+2n}\cdot\frac{n+1}{n+2} = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1$$
dla $n \in N^+$

b) Dla $n=1$ mamy $L = 1+x_1$ i $P = 1+x_1$, a więc $L \geq P$

Załóżmy, że podana nierówność zachodzi dla pewnego $n \geq 1$ i $x_1;\ x_2;\ \cdots;\ x_n;\ x_{n+1} \geq 0$.
Dla $n+1$ mamy:

$$(1+x_1)\cdot(1+x_2)\cdot\cdots\cdot(1+x_n)\cdot(1+x_{n+1}) \geq^{zał.}_{ind.} (1+x_1+x_2+\cdots+x_n)\cdot(1+x_{n+1}) =$$
$$(1+x_{n+1})+(x_1+x_2+\cdots+x_n)(1+x_{n+1}) = 1+x_{n+1}+(x_1+x_2+\cdots+x_n)+$$
$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)x_{n+1} \geq 1+x_{n+1}+x_1+x_2+\cdots+x_n$$

c) Dla $n=1$ mamy $L = 1+x_1$ i $P = 1+1\cdot x+\frac{1\cdot(1-1)}{2}x^2 = 1+x+0\cdot x^2 = 1+x$. Zatem $L \geq P$. Załóżmy, że podana nierówność zachodzi dla pewnego $n \geq 1$ i $x \geq 0$. Dla $n+1$ mamy:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)\cdot(1+x)^n \geq^{zał.}_{ind.} (1+x)\left(1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2\right) = \left(1+nx+\right.$$
$$\left.\frac{n(n-1)}{2}x^2\right)+\left(x+nx^2+\frac{n(n-1)}{2}x^3\right) \geq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+x+nx^2 = 1+(n+1)x+$$
$$\left(\frac{n(n-1)}{2}+n\right)x^2 = 1+(n+1)x+\frac{n^2-n+2n}{2}x^2 = 1+(n+1)x+\frac{n(n+1)}{2}x^2$$