Jacek Kredenc – szkic rozwiązania

Liczby pierwsze

Zadanie 1. Podaj po siedem przykładów liczb pierwszych postaci:

a) $5k+1$

b) $5k+2$

c) $5k+3$

d) 5k+4

Rozwiązanie:

a) 11; 31; 41; 51; 61; 71; 101

b) 2; 7; 17; 37; 47; 67; 87

c) 3; 13; 23; 43; 53; 73; 83

d) 19; 29; 59; 79; 89; 109; 119

Zadanie 2. Podaj podobne przykłady dla następujących „czworaczków" liczb pierwszych:

$$\boldsymbol{p; p+2; p+6; p+8 \quad oraz \quad p; p+4; p+6; p+10}$$

Rozwiązanie

5; 7; 11; 13

11; 13; 17; 19

101; 103; 107; 109

191; 193; 197; 199

431; 433; 437; 439

821; 823; 827; 829

851; 853; 857; 859

7; 11; 13; 17

13; 17; 19; 23

37; 41; 43; 47

97; 101; 103; 107

103; 107; 109; 113

223; 227; 229; 233

307; 311; 313; 317

Zadanie 3. Znajdź wszystkie takie liczby pierwsze p, że:

a) $p|2^p+1$

b) $p|5^p+1$

c) $p|11^p+1$

Rozwiązanie:

Dla dowolnej liczby całkowitej a mamy podzielność $p|a^p-a$ (wniosek z twierdzenia Fermata).

a) $p|2^p-2 \quad i \quad p|2^p+1$. Stąd $p|(2^p+1)-(2^p-2)$, więc $p|3$, czyli $p=3$

b) $p|5^p-5 \quad i \quad p|5^p+1$. Stąd $p|(5^p+1)-(5^p-5)$, więc $p|6$, czyli $p=2$ lub $p=3$

c) $p|11^p-11 \quad i \quad p|11^p+1$. Stąd $p|(11^p+1)-(11^p-11)$, więc $p|12$, czyli $p=2$ lub $p=3$

Zadanie 4. Wykaż, że jeśli$p>2$ jest liczbą pierwszą, to:

$$p|2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot\ldots\cdot(p-1)^2+(-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

Rozwiązanie:

$$2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot\ldots\cdot(p-1)^2=\left(2^{p-1}\cdot1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot\frac{p-1}{2}\right)^2=4^{p-1}\cdot\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2$$

Na mocy wzoru

$$p|\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2+(-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

twierdzenia Fermata

$$p|4^{p-1}-1$$

Mamy

$$p|(4^{p-1}-1)\cdot\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2+\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2+(-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

Z czego wynika, że

$$p|4^{p-1}\cdot\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2+(-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

A to oznacza, ze

$$p|2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot \ldots\cdot (p-1)^2+(-1)^{\frac{p-1}{2}}$$