Jacek Kredenc – szkic rozwiązania

Dowody

Zadanie 1. Wykaż, że jeśli a; b; c>0, to $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Rozwiązanie:

Na podstawie zadania 1 mamy

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ $\quad /: b$ gdzie $b>0$

$$\frac{a}{b^2}+\frac{1}{a}\geq\frac{2}{b}$$

Analogicznie: $\frac{b}{c^2}+\frac{1}{b}\geq\frac{2}{c}$ $\quad i \quad$ $\frac{c}{a^2}+\frac{1}{c}\geq\frac{2}{a}$

Dodajemy stronami trzy ostatnie nierówności otrzymując nierówność

$$\left(\frac{a}{b^2}+\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{b}{c^2}+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{c}{a^2}+\frac{1}{c}\right)\geq\frac{2}{b}+\frac{2}{c}+\frac{2}{a}$$

Stąd

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Zadanie 2. Wykaż, że jeśli $a; b; c>0 \quad i \quad a+b+c=3$, to $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq 1\frac{1}{2}$

Rozwiązanie:

Na podstawie zadania 4 mamy

$$\left((a+b)+(b+c)+(c+a)\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq 9$$

Czyli

$$2(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq 9$$

Korzystając z podanego warunku $a+b+c=3$ możemy zapisać, że

$$2\cdot 3\cdot\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq 9$$

Skąd

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{6}=1\frac{1}{2}$$

Zadanie 3*. Wykaż, że jeśli $a; b; c > 0\ i\ m; n \in N^{+}, to\ a^{m+n}+b^{m+n}+c^{m+n} \geq a^m b^n + b^m c^n + c^m a^n$

Rozwiązanie:

Skorzystamy z uwagi podanej po rozwiązaniu zadania 7. Mamy

$$\frac{\overbrace{a^{m+n}+a^{m+n}+\ldots+a^{m+n}+a^{m+n}}^{m\ składników}+\overbrace{b^{m+n}+b^{m+n}+\ldots+b^{m+n}+b^{m+n}}^{n\ składników}}{m+n}$$
$$\geq \sqrt[m+n]{\underbrace{a^{m+n}\cdot a^{m+n}\cdot\ldots\cdot a^{m+n}\cdot a^{m+n}}_{m\ czynników}\cdot\underbrace{b^{m+n}\cdot b^{m+n}\cdot\ldots\cdot b^{m+n}\cdot b^{m+n}}_{n\ czynników}}$$

Skąd

$$\frac{ma^{m+n}+nb^{m+n}}{m+n} \geq \sqrt[m+n]{(a^{m+n})^m\cdot(b^{m+n})^n}=a^m b^n$$

Analogicznie

$$\frac{mb^{m+n}+nc^{m+n}}{m+n} \geq b^m c^n\ i\ \frac{mc^{m+n}+na^{m+n}}{m+n} \geq c^m a^n$$

Dodajemy stronami trzy ostatnie nierówności otrzymując nierówność

$$\frac{ma^{m+n}+nb^{m+n}+mb^{m+n}+nc^{m+n}+mc^{m+n}+na^{m+n}}{m+n} \geq a^m b^n+b^m c^n+c^m a^n$$

Czyli

$$\frac{(m+n)a^{m+n}+(m+n)b^{m+n}+(n+m)c^{m+n}}{m+n} \geq a^m b^n+b^m c^n+c^m a^n$$

Po skróceniu przez m+n otrzymujemy żądaną nierówność