Jacek Kredenc – szkic rozwiązania

# Zadania Diofantosa

**Zadanie 1.** Spróbujcie rozwiązać równanie diofantyczne: $9^x - 2^y = 1$ w liczbach naturalnych $x, y > 0$.

**Rozwiązanie:**

Jak łatwo zauważyć, jednym z rozwiązań jest $x = 1; y = 3$; bo:

$$9^x - 2^y = 1$$

$$9^1 - 2^3 = 1$$

$$9 - 8 = 1$$

Zapiszmy nasze równanie inaczej

$$9^x - 1 = 2^y$$

Ponieważ

$$9^x = (3^2)^x = 3^{2x} = 3^{x^2}$$

Zatem mamy

$$3^{x^2} - 1 = 2^y$$

$$(3^x - 1)(3^x + 1) = 2^y$$

Ostatnia równość zachodzi tylko dla $x = 1$ i $y = 3$, czyli podane powyżej rozwiązanie jest jedynym rozwiązaniem tego równania.

**Zadanie 2.** Wykaż, że równanie $5^x + 2 = 17^y$ nie ma rozwiązania w liczbach naturalnych $x; y > 0$.

**Rozwiązanie:**

Ponieważ $4a + 1$ przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1, więc $(4a + 1)^n$ przy dzieleniu przez 4 też daje resztę 1. Przyjmując $a = 1$ mamy $4 \cdot 1 = 5$ i przyjmując $a = 4$ mamy $4 \cdot 4 + 1 = 17$. W takim razie lewa strona równania $5^x + 2 = 17^y$ daje przy dzieleniu przez 4 resztę 3, a prawa resztę 1. Dowodzi to, że równanie $5^x + 2 = 17^y$ nie ma rozwiązania.

**Zadanie 3.** Niech $n > 1$ będzie liczbą naturalną. Wykaż, że jeśli równanie: $n^x + n^y = n^z$ ma rozwiązanie w liczbach naturalnych $x; y; z > 0$, to $n = 2$.

**Rozwiązanie:**

Załóżmy, że $x \leq y$. Wówczas równanie $n^x + n^y = n^z$ można przekształcić dorównania

$$n^x(1 + n^{y-x}) = n^z$$

Ponieważ, wszystkie występujące w równaniu literki oznaczają liczby naturalne, więc z musi być większe od x i od y. Po podzieleniu obustronnie przez $n^x$ otrzymamy

$$1 + n^{y-x} = n^{z-x}$$

Łatwo zauważyć, że spełniona jest następująca nierówność podwójna

$$n^p < n^p + 1 \leq n^{p+1}$$

Równość zajdzie tylko wówczas, gdy $n = 2\ i\ x = 0$.

Oznacza to, że nasze równanie ma rozwiązanie tylko wówczas, gdy $n = 1\ i\ x = y\ i\ z = x + 1$.