Jacek Kredenc – szkic rozwiązania

Reszty z dzielenia

Zadanie 1. Wykaż, że:

a) $3|4^n - 1$

b) $11|5 \cdot 25^n + 6 \cdot 36^n$

c) $11|10^{2n+1} + 1$

Rozwiązanie:

a) Udowodnimy, że:

$$4^n - 1 = (3+1)^n - 1 \equiv 1^n - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0\ (mod\ 3)$$

b) Udowodnimy, że:

$$5 \cdot 25^n + 6 \cdot 36^n = 5 \cdot (5^2)^n + 6 \cdot (6^2)^n = 5 \cdot 5^{2n} + 6 \cdot 6^{2n} = 5^{2n+1} + 6^{2n+1} =$$

$$= (11-6)^{2n+1} + 6^{2n+1} \equiv -6^{2n+1} + 6^{2n+1} \equiv 0\ (mod\ 11)$$

c) Udowodnimy, że:

$$10^{2n+1} + 1 = (11-1)^{2n+1} + 1 \equiv -1^{2n+1} + 1 \equiv -1 + 1 \equiv 0\ (mod\ 11)$$

Zadanie 2. Znajdź ciąg reszt z dzielenia potęg 3^n $(n = 1; 2; 3; \dots)$ przez 7.

Rozwiązanie:

$$\mathbf{3^1 = 3 \equiv 3\ (\boldsymbol{mod}\ 7)}$$

$$\mathbf{3^2 \equiv 3 \cdot 3 \equiv 9 \equiv 2\ (\boldsymbol{mod}\ 7)}$$

$$\mathbf{3^3 \equiv 3 \cdot 2 \equiv 6\ (\boldsymbol{mod}\ 7)}$$

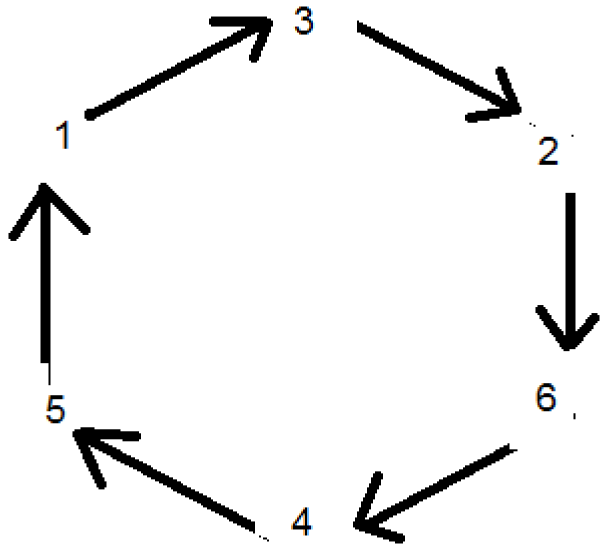
$$\mathbf{3^4 \equiv 3 \cdot 6 \equiv 18 \equiv 4\ (\boldsymbol{mod}\ 7)}$$

$$\mathbf{3^5 \equiv 3 \cdot 4 \equiv 12 \equiv 5\ (\boldsymbol{mod}\ 7)}$$

$$\mathbf{3^6 \equiv 3 \cdot 5 \equiv 15 \equiv 1\ (\boldsymbol{mod}\ 7)}$$

$$\mathbf{3^7 \equiv 3 \cdot 1 \equiv 3\ (\boldsymbol{mod}\ 7)}$$

Odpowiedź:



Zadanie 3. Znajdź ciąg reszt z dzielenia potęg $3^{2^n} + 1$ $(n = 1; 2; 3; \dots)$ przez 13

Rozwiązanie:

Zacznijmy od 3^{2^n}

Niech $a_1 = 3^2$; $a_2 = 3^{2^2} = 3^4 = 3^{2\cdot 2} = a_1^2$; $a_3 = 3^{2^3} = 3^8 = 3^{4\cdot 2} = a_2^2$; $a_n = a_{n-1}^2$

$$a_1 = 3^{2^1} \equiv 3^2 \equiv 9 \ (mod\ 13)$$

$$a_2 = a_1^2 \equiv 9^2 \equiv 81 \equiv 3 \ (mod\ 13)$$

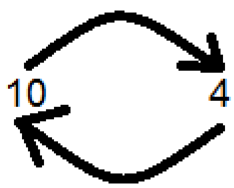
$$a_3 = a_2^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \ (mod\ 13)$$

Czyli

$$3^{2^1} + 1 \equiv 9 + 1 \equiv 10 \ (mod\ 13)$$

$$3^{2^2} + 1 \equiv 3 + 1 \equiv 4 \ (mod\ 13)$$

Odpowiedź:



Zadanie 4. Znajdź ciąg reszt z dzielenia liczb „zerojedynkowych” $\underbrace{10101\cdots01}_{2n-1\,cyfr}$ przez 11

Rozwiązanie:

$$a_{n+1} = \underbrace{101\cdots0101}_{2n+1\,cyfr} = 100\cdot\underbrace{101\cdots01}_{2n-1\,cyfr} + 1 = 100a_n + 1$$

$r_{n+1} \equiv r_n + 1\ (mod\ 7)$, czyli $r_{n+1} \equiv 7\cdot14r_n + 2r_n + 1 \equiv 2r_n + 1\ (mod\ 7)$. $r_1 \equiv a_1 = 1$, $r_2 \equiv 2\cdot1+1 \equiv 3$, $r_3 \equiv 2\cdot3+1 \equiv 7 \equiv 0$, $r_4 \equiv 2\cdot0+1 \equiv 1$, itd.