Operacja „Wielomian”

Zad. 1.

Reszty z dzielenia pewnego wielomianu przez wielomiany x - 1, x - 2, x - 3 wynoszą odpowiednio 4, 5, 6. Znajdź resztę dzielenia tego wielomianu przez wielomian (x - 1)(x - 2)(x - 3).

Wskazówka: Zapisujemy W(x) = P(x) . (x - 1)(x - 2)(x - 3) + ax^2 + bx + c, gdzie a, b, c są współczynnikami, które należy wyznaczyć.

Rozwiązanie

Ponieważ reszta jest co najwyżej wielomianem stopnia 2 postaci

$$W(x) = ax^2 + bx + c$$

więc aby znaleźć współczynniki tego wielomianu należy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 5 \\ 9a + 3b + c = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \\ 3a + b = 1 \\ 5a + b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \\ 3a + b = 1 \\ 2a = 0 \end{cases}$$

$$a = 0; \quad b = 1; \quad c = 3$$

$$W(x) = x + 3$$

Zad. 2.

Wyznacz współczynniki a i b tak, aby wielomian $x^{100} + ax + b$ był podzielny przez wielomian $x^2 - 1$.

Wskazówka: Zauważ, że $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.

Rozwiązanie

Ponieważ

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

Więc $W(1) = 0 \quad i \quad W(-1) = 0$

Mamy wiec następujący układ równań

$$\begin{cases} 1 + a + b = 0 \\ 1 - a + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ a - b = 1 \end{cases}$$

$$2a = 0$$

$$b = -1$$

$$W(x) = x^{100} - 1$$

Zad. 3.

Wykaż, że jeśli wielomian $a_0 + a_1 x^3 + a_2 x^6 + ... + a_n x^{3n}$ jest podzielny przez wielomian $x^2 + x + 1$, to $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n = 0$.

Wskazówka: Zauważ, że $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ oraz $a_i x^{3i} = a_i * (x^{3i} - 1) + a_i$ dla i = 0, 1, 2, .., n. Następnie skorzystaj z faktu, że $x^3 - 1$ dzieli $x^{3i} - 1$ dla i = 0, 1, 2, .., n.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1x^3 + a_2x^6 + \cdots + a_nx^{3n} \\ &\qquad = a_0 + (a_1(x^3 - 1) + a_1) + (a_2(x^6 - 1) + a_2) + \cdots + (a_n(x^{3n} - 1) + a_n) \\ &\qquad = \big(a_1(x^3 - 1) + a_2(x^6 - 1) + \cdots + a_n(x^{3n} - 1)\big) + a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

Ponieważ

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

Więc $W(1) = 0$, czyli $a_0 + a_1x^3 + a_2x^6 + \cdots + a_nx^{3n} = 0$

Ponieważ $x^{3k} - 1$jest podzielne przez $x^3 - 1$, więc każdy składnik w nawiasie równa się zero, gdy za x położymy 1.

Oznacza to, że $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$