Zagadki z dowodami

Zadanie 1.

Czy istnieje taka liczba naturalna $m > 0$, że $C(11m) = C(m)$

Rozwiązanie:

Niech $m = 99$. Wówczas $11 \cdot m = 11 \cdot 99 = 1089$, czyli

$$L = C(11m) = C(11 \cdot 99) = C(1089) = 18$$

$$P = C(m) = C(99) = 18$$

$$L = P$$

Taka liczba istnieje. Jest nią na przykład liczba 99.

Zadanie 2.

Wykaż, że nie istnieje taka liczba naturalna m, że $C(m+1) = 3C(m)$.

Rozwiązanie:

Gdy w rzędzie jedności liczby m stoi jedna z cyfr {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8}, to wówczas: $C(m+1) = C(m) + 1$. Musiałaby więc zachodzić następująca równość

$$C(m) + 1 = 3C(m)$$

Albo inaczej

$$1 = 2C(m)$$

A to jest niemożliwe.

Gdy liczba m kończy się na 9, to wówczas $C(m+1) = C(m) - 8$. Musiała by wówczas zachodzić następująca równość

$$C(m) - 8 = 3C(m)$$

Albo inaczej

$$-8 = 2C(m)$$

Co też jest niemożliwe

Zadanie 3.

Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych $m > 0$, że $C(m-1) = 3C(m)$.

Rozwiązanie:

Niech $m = 40$. Wówczas $C(m-1) = C(40-1) = C(39) = 12$. $3C(m) = 3C(40) = 3 \cdot 4 = 12$.

Niech $m = 130$. Wówczas $C(m-1) = C(130-1) = C(129) = 12$. $3C(m) = 3C(130) = 3 \cdot 4 = 12$.

W takim razie równość $C(m-1) = 3C(m)$ będzie prawdziwa dla każdego m postaci: $m = 10^k + 30,\ \ gdzie\ \ k\ liczba\ naturalna\ i\ k \geq 2$

Zadanie 4.

Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych m spełniających równanie $C(m+9) = C(m)$ oraz nieskończenie wiele liczb naturalnych m, które nie spełniają tego równania.

Rozwiązanie:

Niech $m = 31$. Wówczas: $C(m+9) = C(31+9) = C(40) = 4$ i $C(31) = 4$.

Podobnie, jeśli $m = 11$. Wówczas: $C(m+9) = C(11+9) = C(20) = 2$ i $C(11) = 2$.

Czyli warunek $C(m+9) = C(m)$ będzie spełniony chociażby dla wszystkich liczb m postaci: $m = 10k + 1,\ \ gdzie\ \ k\ dowolna\ liczba\ naturalna$

Warunku $C(m+9) = C(m)$ nie spełniają liczy m postaci $m = 10k,\ gdzie\ \ k - dowolna\ liczba\ naturalna.$

Przykładem może być liczba $m = 20$

$C(20+9) = C(29) = 11$, a $C(20) = 2$

Opracował Jacek Kredenc