Kolejne dowody

Zadanie 1.

Wiadomo, że $a_3 = 5\ i\ S_{10} = 100$. Wyznacz element a_7 tego ciągu arytmetycznego.

Rozwiązanie:

Na mocy definicji ciągu arytmetycznego mamy

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

Czyli

$$S_3 - S_2 = 5$$

Na mocy twierdzenia 2 możemy zapisać następujący układ równań:

$$\begin{cases} (A \cdot 3^2 + B \cdot 3) - (A \cdot 2^2 + B \cdot 2) = 5 \\ A \cdot 10^2 + B \cdot 10 = 100 \end{cases}$$

Uprośćmy nasz układ równań

$$\begin{cases} (9A + 3B) - (4A + 2B) = 5 \\ 100A + 10B = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9A + 3B - 4A - 2B = 5 \\ 10A + B = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5A + B = 5 \\ 10A + B = 10 \end{cases}$$

$$5A = 5$$

$$A = 1$$

Łatwo zauważyć, że $B = 0$

Ponieważ

$$a_n = 2An + B - A$$

Więc

$$a_7 = 2 \cdot 1 \cdot 7 + 0 - 1 = 13$$

Zadanie 2.

Dane są liczby naturalne $k > l > 0$ oraz liczby rzeczywiste u i w. Wiadomo, że $S_k = u$ i $S_l = w$. Oblicz S_{k+l}.

Rozwiązanie:

Zgodnie z definicją

$$S_{k+l} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{k-1} + a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+l-2} + a_{k+l-1} + a_{k+l}$$

Gdzie

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{k-1} + a_k = S_k$$

Ponad to, z uwagi, że jest to ciąg arytmetyczny, zachodzą następujące wzory:

$$a_{k+1} = a_k + a_1$$

$$a_{k+2} = a_k + a_2$$

$$a_{k+l-2} = a_k + a_{l-2}$$

$$a_{k+l-1} = a_k + a_{l-1}$$

$$a_{k+l} = a_k + a_l$$

Możemy więc zapisać

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+l-2} + a_{k+l-1} + a_{k+l} = a_k + a_1 + a_k + a_2 + \cdots + a_k + a_{l-2} +$$

$$+a_k + a_{l-1} + a_k + a_l = l \cdot a_k + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{l-1} + a_l = l \cdot S_l$$

Wynika z tego, że

$$S_{k+l} = S_k + l \cdot a_k + S_l = u + l \cdot a_k + w$$

Jedyną nieznaną wielkością w tym wzorze jest a_k. a_k możemy wyznaczyć, ze wzoru

$$a_k = S_k - S_{k-1}$$

Ponieważ rozważany ciąg jest ciągiem arytmetycznym, więc istnieją takie A i B, że

$$S_k = A \cdot k^2 + B \cdot k$$

i

$$S_l = A \cdot l^2 + B \cdot l$$

czyli

$$a_k = (A \cdot k^2 + B \cdot k) - \big(A \cdot (k-1)^2 + B \cdot (k-1)\big) = (A \cdot k^2 + B \cdot k) -$$

$$-\big(A \cdot (k^2 - 2k + 1) + B \cdot (k-1)\big) = (A \cdot k^2 + B \cdot k) - (A \cdot k^2 - 2Ak + A + B \cdot k - B) =$$

$$= A \cdot k^2 + B \cdot k - A \cdot k^2 + 2Ak - A - B \cdot k + B = 2Ak - A + B = A(2k-1) + B$$

Należy tylko wyznaczyć A i B. Można je wyliczyć z następującego układu równań:

$$\begin{cases} S_k = A \cdot k^2 + B \cdot k \\ S_l = A \cdot l^2 + B \cdot l \end{cases}$$

Albo inaczej

$$\begin{cases} A \cdot k^2 + B \cdot k = u \\ A \cdot l^2 + B \cdot l = w \end{cases}$$

Wyznaczmy z pierwszego i drugiego równania A

$$A \cdot k^2 = u - B \cdot k \qquad A \cdot l^2 = w - B \cdot l$$

$$A = \frac{u - B \cdot k}{k^2} \qquad A = \frac{w - B \cdot l}{l^2}$$

Aby wyznaczyć B przyrównajmy prawe strony otrzymanych równań

$$\frac{u - B \cdot k}{k^2} = \frac{w - B \cdot l}{l^2}$$

$$\frac{u}{k^2} - \frac{B \cdot k}{k^2} = \frac{w}{l^2} - \frac{B \cdot l}{l^2}$$

$$\frac{u}{k^2} - \frac{B}{k} = \frac{w}{l^2} - \frac{B}{l}$$

$$\frac{B}{l} - \frac{B}{k} = \frac{w}{l^2} - \frac{u}{k^2}$$

$$\frac{B \cdot k - B \cdot l}{lk} = \frac{wk^2 - ul^2}{l^2k^2}$$

$$B \cdot k - B \cdot l = \frac{wk^2 - ul^2}{lk}$$

$$B \cdot (k - l) = \frac{wk^2 - ul^2}{lk}$$

$$B = \frac{wk^2 - ul^2}{lk(k - l)}$$

W bardzo podobny sposób wyznaczymy teraz A.

$$B \cdot k = u - A \cdot k^2 \qquad B \cdot l = w - A \cdot l^2$$

$$B = \frac{u - A \cdot k^2}{k} \qquad B = \frac{w - A \cdot l^2}{l}$$

$$\frac{u - A \cdot k^2}{k} = \frac{w - A \cdot l^2}{l}$$

$$\frac{u}{k}-\frac{A\cdot k^2}{k}=\frac{w}{l}-\frac{A\cdot l^2}{l}$$

$$\frac{u}{k}-A\cdot k=\frac{w}{l}-A\cdot l$$

$$A\cdot k-A\cdot l=\frac{u}{k}-\frac{w}{l}$$

$$A\cdot(k-l)=\frac{ul-wk}{kl}$$

$$A=\frac{ul-wk}{kl\cdot(k-l)}$$

Wyznaczone A i B wstawiamy teraz do wzoru na a_k

$$a_k=A(2k-1)+B=\frac{ul-wk}{kl\cdot(k-l)}(2k-1)+\frac{wk^2-ul^2}{lk(k-l)}$$

Przekształćmy powyższy wzór, tak by dojść do najprostszej budowy

$$a_k=\frac{2ulk-ul-2wk^2+wk+wk^2-ul^2}{lk(k-l)}=\frac{2ulk-ul-wk^2+wk-ul^2}{lk(k-l)}$$

Teraz a_k wstawiamy do wzoru na S_{k+l}

$$S_{k+l}=u+l\cdot a_k+w=u+l\cdot\frac{2ulk-ul-wk^2+wk-ul^2}{lk(k-l)}+w=$$

$$=u+\frac{2ulk-ul-wk^2+wk-ul^2}{k(k-l)}+w=u+\frac{2ulk+(wk-wk^2)-(ul^2+ul)}{k(k-l)}+w=$$

$$=u+\frac{2ulk}{k(k-l)}+\frac{wk(1-k)}{k(k-l)}-\frac{ul(l+1)}{k(k-l)}+w=u+\frac{2ul}{(k-l)}+\frac{w(1-k)}{(k-l)}-\frac{ul(l+1)}{k(k-l)}+w$$

Ostatecznie mamy

$$S_{k+l}=u+\frac{2ul}{(k-l)}+\frac{w(1-k)}{(k-l)}-\frac{ul(l+1)}{k(k-l)}+w$$

Opracował Jacek Kredenc