Jacek Kredenc

Poszukiwana

Jakie cyfry ukrywają się pod literkami słowa $LOGIKA$, jeśli zachodzi równość:

$$\sqrt{LOGIKA} = IKA$$

Rozwiązanie

Aby zachodził warunek podany w zadaniu, musi zachodzić warunek:

$$(IKA)^2 = LOGIKA$$

Warunek ten będzie spełniony, gdy $I \geq 3$ (podniesienie do kwadratu).

Nasz warunek możemy zapisać jako:

$$(100I + 10K + A)^2 = 100000L + 10000O + 1000G + 100I + 10K + A$$

Zajmijmy się na razie lewą stroną naszego równania:

$$(100I + 10K + A)^2 = [100I + (10K + A)]^2 = 10000I^2 + 2 \cdot 100I \cdot (10K + A) +$$

$$+(10K + A)^2 = 10000I^2 + 2000IK + 200IA + 100K^2 + 20KA + A^2 = 10000I^2 +$$

$$+2000IK + 100(2IA + K^2) + 20KA + A^2$$

Nasze równanie otrzyma więc postać:

$$10000I^2 + 2000IK + 100(2IA + K^2) + 20KA + A^2 = 100000L + 10000O + 1000G +$$

$$100I + 10K + A$$

Rozbijmy teraz nasze równanie na trzy prostsze równania.

Tylko składnik A^2 po lewej stronie równania może mieć wpływ na rząd jedności. Jednak, chociaż $0 \leq A < 10$, to $0 \leq A^2 < 100$, dlatego pierwsze równanie ma postać:

$$A^2 = 10x + A,$$

gdzie x jest całkowite mniejsze od 10.

Na rząd dziesiątek może mieć tylko wpływ składnik $20KA$, niestety składnik ten może też być większy od 100. Na rząd dziesiątek ma też wpływ składnik $10x$ z powyższego równania, dlatego drugie równanie ma postać:

$20KA + 10x = 100y + 10K$, gdzie x jest całkowite mniejsze od 10.

Po podzieleniu obustronnie przez 10 otrzymujemy:

$2KA + x = 10y + K$

Trzecie równanie będzie miało postać:

$100(2IA + K^2) + 100y = 1000z + 100I$,

gdzie z jest całkowite mniejsze od 10.

Po podzieleniu obustronnie przez 100 otrzymujemy:

$2IA + K^2 + y = 10z + I$

Dalsze układanie równań jest niekonieczne. Mamy wiec do rozwiązania następujący układ równań:

$$\begin{cases} A^2 = 10x + A \\ 2KA + x = 10y + K \\ 2IA + K^2 + y = 10z + I \end{cases}$$

Czytelnik sam łatwo sprawdzi, że pierwsze równanie będzie spełnione, gdy $A = 0 \quad lub$

$A = 1 \quad lub \quad A = 5 \quad lub \quad A = 6$

Sprawdźmy te cztery przypadki

Przypadek I

Niech $A = 0$.

Ponieważ $0^2 = 0$; więc $x = 0$.

Przejdźmy do drugiego równania:

$2KA + x = 10y + K$

Podstawiając wyznaczone A i x otrzymujemy:

$2K \cdot 0 + 0 = 10y + K$

$0 = 10y + K$

Wynika z tego, że $K = 0$. Ponieważ K i A nie mogą być jednocześnie równe 0 (muszą być różne), więc ten przypadek odpada.

Przypadek II

Niech $A = 1$.

Ponieważ $1^2 = 1$; więc $x = 0$.

Przejdźmy do drugiego równania:

$$2KA + x = 10y + K$$

Podstawiając wyznaczone A i x otrzymujemy:

$$2K \cdot 1 + 0 = 10y + K$$

$$2K = 10y + K$$

$$K = 10y$$

Powyższe równanie zachodzi, gdy $K = 0$, lub gdy K jest wielokrotnością liczby 10. Ponieważ jednak K jest liczbą jednocyfrową, pozostaje przypadek $K = 0$. Wówczas $y = 0$.

Przejdźmy do równania trzeciego:

$$2IA + K^2 + y = 10z + I$$

Podstawmy do tego równania wyznaczone A; K i y

$$2 \cdot 1 \cdot I + 0^2 + 0 = 10z + I$$

$$2I = 10z + I$$

$$I = 10z$$

Powyższe równanie zachodzi, gdy $I = 0$, lub gdy I jest wielokrotnością liczby 10. Ponieważ jednak I jest liczbą jednocyfrową, pozostaje przypadek $I = 0$, co jest sprzeczne z założeniem, że $I \geq 3$.

Przypadek III

Niech $A = 5$.

Ponieważ $5^2 = 25$; więc $x = 2$.

Przejdźmy do drugiego równania:

$2KA + x = 10y + K$

Podstawiając wyznaczone A i x otrzymujemy:

$2 \cdot 5 \cdot K + 2 = 10y + K$

$10K + 2 = 10y + K$

Ponieważ $10K$ i $10y$ są wielokrotnościami liczby 10,więc $K = 2$. Wówczas: $y = 2$

Przechodzimy do równania trzeciego.

$2IA + K^2 + y = 10z + I$

Podstawmy do tego równania wyznaczone A; K i y

$2 \cdot 5 \cdot I + 2^2 + 2 = 10z + I$

$10I + 4 + 2 = 10z + I$

$10I + 6 = 10z + I$

Po lewej stronie równania cyfrą jedności będzie 6, czyli równanie będzie spełnione dla $I = 6$.

Wynika z tego, że $A = 5; K = 2 \ i \ I = 6$.

$625^2 = 390625$

Tak więc: $L = 3; O = 9; G = 0; I = 6; K = 2 \ i \ A = 5$

Przypadek IV

Niech $A = 6$.

Ponieważ $6^2 = 36$; więc $x = 3$.

Przejdźmy do drugiego równania:

$2KA + x = 10y + K$

Podstawiając wyznaczone A i x otrzymujemy:

$2 \cdot 6 \cdot K + 3 = 10y + K$

$12K + 3 = 10y + K$

$11K = 10y - 3$

Aby równość zachodziła, prawa strona równania musi być podzielna przez 11. Będzie to spełnione, gdy $10y - 3 = 77$. Oznacza to, że $K = 7 \quad a \quad y = 8$

Przejdźmy do równania trzeciego:

$2IA + K^2 + y = 10z + I$

Podstawmy, wyznaczone A; K i y:

$2 \cdot 6 \cdot I + 7^2 + 8 = 10z + I$

$12I + 49 + 8 = 10z + I$

$12I + 57 = 10z + I$

$11I = 10z - 57$

Teraz prawa strona równania musi być podzielna przez 11, czyli musi być równa 0; 11; 22; 33.

Jeżeli prawa strona równania byłaby równa zero, to l też by było zerem, co jest sprzeczne z założeniem. Prawa strona może być jeszcze równa 33. Wówczas I będzie równe 3.

Wynika z tego, że $A = 6; K = 7 \ i \ I = 3$.

$376^2 = 141376$

Oznaczało by to, że L i G jest równe 1, co jest niezgodne z złożeniem.