Marian Maciocha

Najkrótsze sieci

Zadanie:

Dla danych punktów A, B, C, D wyznaczyć sieci L i P oraz najkrótszą sieć:

a) A(0; 0), B(5; 0), C(5; 8), D(0; 8),

b) A(0; 0), B(5; 0), C(5; 12), D(0; 12),

c) A(0; 0), B(12; 0), C(12; 12), D(0; 12).

Rozwiązanie zadania (a):

Dla punktów A(0; 0), B(5; 0), C(5; 8), D(0; 8) mamy: a = 5, b = 8.

Warunek istnienia sieci „p”: $\mathbf{b \geq \dfrac{a\sqrt{3}}{3}}$ **.**

Dla a = 5 obliczamy: $\dfrac{5\sqrt{3}}{3} < \dfrac{5 * 1{,}74}{3} = 2{,}9 < 8.$

Zatem warunek istnienia sieci „p” jest spełniony.

Obliczamy długość sieci „p” oraz współrzędne punktów P_1 i P_2 sieci „p”:

$L_p = 8 + 5\sqrt{3} \approx 16{,}7.$

$P_1 = \left(\dfrac{5}{2} ; \dfrac{5\sqrt{3}}{6} \right) \quad P_2 = \left(\dfrac{5}{2} ; 8 - \dfrac{5\sqrt{3}}{6} \right)$

$P_1 \approx (2{,}5; 1{,}44) \quad P_2 \approx (2{,}5; 6{,}56)$

Warunek istnienia sieci „q”: $\mathbf{a \geq \dfrac{b\sqrt{3}}{3}}$ **.**

Dla b = 8 obliczamy: $\dfrac{8\sqrt{3}}{3} < \dfrac{8 * 1,74}{3} = 4,64 < 5.$

Zatem warunek istnienia sieci „q” jest spełniony.

Obliczamy długość sieci „q” oraz współrzędne punktów Q_1 i Q_2 sieci „q”:

$L_q = 5 + 8\sqrt{3} \approx 18,9.$

$Q_1 = \left(\dfrac{8\sqrt{3}}{6}; \dfrac{8}{2} \right) \quad Q_2 = \left(5 - \dfrac{8\sqrt{3}}{6}; \dfrac{8}{2} \right)$

$Q_1 \approx (2,31 , 4) \quad Q_2 \approx (2,69 , 4)$

Ponieważ a < b, to najkrótszą siecią jest sieć „p”, a punktami Steinera są punkty P_1 i P_2.

Rozwiązanie zadania (b):

Dla punktów A(0; 0), B(5; 0), C(5; 12), D(0; 12) mamy: a = 5, b = 12.

Warunek istnienia sieci „p”: $\mathbf{b \geq \dfrac{a\sqrt{3}}{3}}$ **.**

Dla a = 5 obliczamy: $\dfrac{5\sqrt{3}}{3} < \dfrac{5 * 1,74}{3} = 2,9 < 12.$

Zatem warunek istnienia sieci „p” jest spełniony.

Obliczamy długość sieci „p” oraz współrzędne punktów P_1 i P_2 sieci „p”:

$L_p = 12 + 5\sqrt{3} \approx 20,7.$

$P_1 = \left(\dfrac{5}{2}; \dfrac{5\sqrt{3}}{6} \right) \quad P_2 = \left(\dfrac{5}{2}, 12 - \dfrac{5\sqrt{3}}{6} \right)$

$P_1 \approx (2,5; 1,44) \quad P_2 \approx (2,5; 10,56)$

Warunek istnienia sieci „q”: $\mathbf{a \geq \dfrac{b\sqrt{3}}{3}}$ **.**

Dla b = 12 obliczamy: $\dfrac{12\sqrt{3}}{3} > \dfrac{12 * 1{,}72}{3} = 6{,}88 > 5$.

Zatem warunek istnienia sieci „q” jest nie spełniony.

Najkrótszą siecią jest sieć „p”, a punktami Steinera są punkty P_1 i P_2.

Rozwiązanie zadania (c):

Dla punktów A(0,0), B(12, 0), C(12, 12), D(0, 12) mamy: a = 12, b = 12.

Jeśli a = b, to $L_p = L_q$, więc punktami Steinera są zarówno punkty P_1 i P_2 jak i punkty Q_1 i Q_2.

Jeśli a = b = 12, to punkty Steinera mają współrzędne:

$$S_1 = \left(\frac{12\sqrt{3}}{6};\ \frac{12}{2}\right) \quad S_2 = \left(\frac{12(6-\sqrt{3})}{6};\ \frac{12}{2}\right)$$

$S_1 = (2\sqrt{3} ; 6)$ $S_2 = (2(6-\sqrt{3}); 6)$

$S_1 \approx (3{,}46; 6)$ $S_2 \approx (8{,}54; 6)$

lub

$$S_3 = \left(\frac{12}{2};\ \frac{12\sqrt{3}}{6}\right) \quad S_4 = \left(\frac{12}{2};\ \frac{12(6-\sqrt{3})}{6}\right)$$

$S_3 = (6; 2\sqrt{3})$ $S_4 = (6; 2(6-\sqrt{3}))$

$S_3 \approx (6; 3{,}46)$ $S_4 \approx (6; 8{,}54)$

Długość sieci Steinera wynosi $L = L_p = L_q = 12 + 12\sqrt{3} = 12(1+\sqrt{3}) \approx 32{,}8$.