Jacek Kredenc

Łamanie głowy

Zadanie 1

Rozwiń do ułamka ciągłego $\sqrt{13}$ i znajdź pięć pierwszych wyrazów ciągu przybliżeń tego pierwiastka.

Rozwiązanie

Ponieważ $3 < \sqrt{13} < 4$, więc:

$$3 + \frac{1}{\alpha} = \sqrt{13}$$

$$\frac{1}{\alpha} = \sqrt{13} - 3$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{13} - 3}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{13} + 3}{(\sqrt{13} - 3)(\sqrt{13} + 3)}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{13} + 3}{13 - 9}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{13} + 3}{4}$$

Wyznaczone α wstawiamy do równania wyjściowego i otrzymujemy:

$$3 + \frac{1}{\frac{\sqrt{13} + 3}{4}} = \sqrt{13}$$

$$3 + \frac{1}{\frac{3 + \frac{1}{\alpha} + 3}{4}} = \sqrt{13}$$

$$3 + \frac{1}{\frac{4 + \frac{1}{\alpha} + 2}{4}} = \sqrt{13}$$

$$3+\frac{1}{1+\frac{\frac{1}{\alpha}+2}{4}}=\sqrt{13}$$

Gdy przyjmiemy $\frac{1}{\beta}=\frac{\frac{1}{\alpha}+2}{4}$, to powyższe równanie będzie miało postać:

$$3+\frac{1}{1+\frac{1}{\beta}}=\sqrt{13}$$

Wyznaczmy więc β:

$$\frac{1}{\beta}=\frac{\frac{1}{\alpha}+2}{4}$$

$$\beta=\frac{4}{\frac{1}{\alpha}+2}=\frac{4}{\frac{1+2\alpha}{\alpha}}=\frac{4\alpha}{1+2\alpha}$$

Podstawmy teraz za $\alpha=\frac{\sqrt{13}+3}{4}$ i otrzymujemy:

$$\beta=\frac{4\cdot\frac{\sqrt{13}+3}{4}}{1+2\cdot\frac{\sqrt{13}+3}{4}}=\frac{\sqrt{13}+3}{1+\frac{\sqrt{13}+3}{2}}=\frac{\sqrt{13}+3}{\frac{2+\sqrt{13}+3}{2}}=\frac{2\left(\sqrt{13}+3\right)}{\sqrt{13}+5}=$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{13}+3\right)\left(\sqrt{13}-5\right)}{\left(\sqrt{13}+5\right)\left(\sqrt{13}-5\right)}=\frac{2\left(13-5\sqrt{13}+3\sqrt{13}-15\right)}{13-25}=\frac{2\left(-2-2\sqrt{13}\right)}{-12}=\frac{\sqrt{13}+1}{3}$$

Podstawmy teraz za $\sqrt{13}=3+\frac{1}{\alpha}$ i otrzymamy:

$$\beta=\frac{\sqrt{13}+1}{3}=\frac{3+\frac{1}{\alpha}+1}{3}=1+\frac{\frac{1}{\alpha}+1}{3}$$

Tak więc otrzymujemy:

$$3+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{\frac{1}{\alpha}+1}{3}}}=\sqrt{13}$$

Niech $\frac{1}{\gamma}=\frac{\frac{1}{\alpha}+1}{3}$, wówczas równanie możemy zapisać jako:

$$3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\gamma}}}=\sqrt{13}$$

Wyznaczmy teraz γ:

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{\frac{1}{\alpha}+1}{3}=\frac{\frac{1+\alpha}{\alpha}}{3}=\frac{1+\alpha}{3\alpha}$$

$$\gamma=\frac{3\alpha}{1+\alpha}$$

Zamieniając α przez wyrażenie $\alpha=\frac{\sqrt{13}+3}{4}$, otrzymujemy:

$$\gamma=\frac{3\cdot\frac{\sqrt{13}+3}{4}}{1+\frac{\sqrt{13}+3}{4}}=\frac{\frac{3\left(\sqrt{13}+3\right)}{4}}{\frac{4+\sqrt{13}+3}{4}}=\frac{3\left(\sqrt{13}+3\right)}{\sqrt{13}+7}=\frac{3\left(\sqrt{13}+3\right)\left(\sqrt{13}-7\right)}{\left(\sqrt{13}+7\right)\left(\sqrt{13}-7\right)}=$$

$$=\frac{3\left(13-7\sqrt{13}+3\sqrt{13}-21\right)}{13-49}=\frac{3\left(-8-4\sqrt{13}\right)}{-36}=\frac{\sqrt{13}+2}{3}$$

Podstawiając, z początkowego założenia, za $\sqrt{13}=3+\frac{1}{\alpha}$, otrzymamy:

$$\gamma=\frac{\sqrt{13}+2}{3}=\frac{3+\frac{1}{\alpha}+2}{3}=1+\frac{\frac{1}{\alpha}+2}{3}$$

Otrzymujemy więc:

$$3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{\frac{1}{\alpha}+2}{3}}}}=\sqrt{13}$$

Powtarzamy czynności i wstawiając $\frac{1}{\delta}=\frac{\frac{1}{\alpha}+2}{3}$ otrzymujemy:

$$3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\delta}}}}=\sqrt{13}$$

Wyznaczamy teraz δ.

$$\frac{1}{\delta} = \frac{\frac{1}{\alpha} + 2}{3} = \frac{\frac{1+2\alpha}{\alpha}}{3} = \frac{1+2\alpha}{3\alpha}$$

$$\delta = \frac{3\alpha}{1+2\alpha}$$

I dalej mamy, podstawiając, jak poprzednio, za $\alpha = \frac{\sqrt{13}+3}{4}$ mamy:

$$\delta = \frac{3\alpha}{1+2\alpha} = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{13}+3}{4}}{1+2 \cdot \frac{\sqrt{13}+3}{4}} = \frac{\frac{3\cdot(\sqrt{13}+3)}{4}}{1+\frac{\sqrt{13}+3}{2}} = \frac{\frac{3\cdot(\sqrt{13}+3)}{4}}{\frac{2+\sqrt{13}+3}{2}} = \frac{\frac{3\cdot(\sqrt{13}+3)}{2}}{\sqrt{13}+5} =$$

$$= \frac{3\cdot(\sqrt{13}+3)}{2\cdot(\sqrt{13}+5)} = \frac{3\cdot(\sqrt{13}+3)(\sqrt{13}-5)}{2\cdot(\sqrt{13}+5)(\sqrt{13}-5)} = \frac{3\cdot(13-5\sqrt{13}+3\sqrt{13}-15)}{2\cdot(13-25)} =$$

$$= \frac{3\cdot(-2-2\sqrt{13})}{-24} = \frac{\sqrt{13}+1}{4}$$

Wracamy do zmiennej α, podstawiając za $\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{\alpha}$, otrzymujemy

$$\delta = \frac{\sqrt{13}+1}{4} = \frac{3+\frac{1}{\alpha}+1}{4} = \frac{4+\frac{1}{\alpha}}{4} = 1 + \frac{\frac{1}{\alpha}}{4} = 1 + \frac{1}{4\alpha}$$

Mamy więc

$$3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4\alpha}}}}} = \sqrt{13}$$

Wstawiamy nową zmienną ε taką, że $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{4\alpha}$, otrzymujemy

$$3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\varepsilon}}}}} = \sqrt{13}$$

Oczywiście

$$\varepsilon = 4\alpha = 4 \cdot \frac{\sqrt{13}+3}{4} = \sqrt{13}+3 = 6 + \frac{1}{\alpha}$$

I od tego momentu zacznie się okres ułamka:

$$3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{\alpha}}}}}}}}}} = \sqrt{13}$$

Pięć pierwszych wyrazów ciągu przybliżeń tego pierwiastka:

$$a_0 = 3$$

$$a_1 = 3 + \frac{1}{1} = 4$$

$$a_2 = 3 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}} = 3 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$$

$$a_3 = 3 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}} = 3 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{3}{2}} = 3 + \frac{2}{3} = 3\frac{2}{3}$$

$$a_4 = 3 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}} = 3 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}} = 3 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{3}{2}}} = 3 + \cfrac{1}{1+\cfrac{2}{3}} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{3}} = 3 + \frac{3}{5} =$$

$$3\frac{3}{5}$$

Zadanie 2 Pełne rozwiązanie w 38. numerze "Świata Matematyki".